

Lesson - 2

साझा (Partnership)

1. लाभ अथवा हानि का बंटवारा साझेदारों को उनके द्वारा लगायी गई पूंजी के अनुपात में किया जाता है ।
2. व्यापार में एक निश्चित अवधि प्रायः 1 वर्ष की समाप्ति पर ही लाभ हानि का वितरण, समस्त खर्चों के घटा देने के उपरान्त किया जाता है ।
3. सक्रिय साझेदार यदि कोई है और उसका पारिश्रमिक भी निर्दिष्ट है तो लाभ में से अन्य व्ययों के साथ साथ उसका पारिश्रमिक भी घटाने के उपरान्त शुद्ध लाभ या हानि का वितरण साझेदारों में किया जाता है तथा सक्रिय साझेदार को भी उसकी पूंजी/ समय के अनुपात में यह हिस्सा पृथक से मिलता है ।
समान समय हेतु अलग-अलग धन लगाने पर लाभ-हानि का बंटवारा

(i) लाभ में साझेदारों का भाग

$$\frac{\text{शुद्ध लाभ}}{\text{अनुपातों की संख्याओं का योग}} \times \text{उस साझेदार की आनुपातिक संख्या}$$

(ii) कुल लाभ = $\frac{\text{अनुपातों की संख्याओं का योग} \times \text{एक साझेदार का लाभ जो ज्ञात है}}{\text{उस साझेदार की आनुपातिक संख्या जिसका लाभ ज्ञात हो}}$

सक्रिय साझेदार :- वह व्यक्ति जो व्यापार हेतु धन के साथ साथ स्वयं का श्रम या प्रबन्धन या देखभाल और उत्तरदायित्व भी सम्भालता है वह सक्रिय साझेदार कहलाता है ।

1. क और ख क्रमशः 30,000 रु. और 25,000 रु. लगाकर एक दुकान खोली । 1 वर्ष के अन्त में उनका लाभ 10,670 रु. है तो प्रत्येक का लाभ ज्ञात कीजिए ?

Ans. क की पूंजी : ख की पूंजी = 30,000 : 25,000

क का लाभ : ख का लाभ = 6:5

अनुपातों की संख्या का योग = 6+5=11

कुल लाभ = 10,670

$$\begin{aligned} \text{क का लाभ} & :- \frac{10670}{11} \times 6 \\ & = 970 \times 6 = 5820 \text{ रु.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ख का लाभ} & :- \frac{10670}{11} \times 5 \\ & = 970 \times 5 = 4850 \text{ रु.} \end{aligned}$$

प्रश्न की विधी अनुरूप प्रश्न :

2. सुरेन्द्र, हरेन्द्र, और नरेन्द्र ने क्रमशः 37500 रु., 32,500 रु. और 25,000 रु. लगाकर एक फैक्ट्री लगायी । 1 वर्ष के अन्त में कुल लाभ 20,000 रु. हुआ हो तथा दुकान का किराया 400 रु. प्रतिमाह हो तो लाभ में से प्रत्येक का हिस्सा ज्ञात कीजिए ?
3. राम और नरेश के खेतों में नहर से पानी देने का रास्ता एक ही है व उनके खेत समान आकार के हैं यदि राम 4 खेतों में 10 घण्टे और नरेश 3 खेतों में 12 घण्टे पानी देता है, तो नहर विभाग के पानी के बिल 171 रु. में से प्रत्येक को कितना देना होगा ?
4. गोविन्द और मुरारी एक ही मकान में रहते हैं । गोविन्द 60 वाट के 3 बल्ब और मुरारी 60 वाट का एक बल्ब जलाता है । यदि एक मास का बिजली का बिल 105 रु. आये तो प्रत्येक द्वारा चुकाये जाने वाली राशि ज्ञात की जाए ?
5. हरिराम, मंगला और मानसिंह ने एक चरागाह किराये पर लिया । हरिराम की 250 गाये, मंगला की 300 गाये और मानसिंह की 150 गाये वर्ष भर तक चरती रही । यदि मंगला ने अपने भाग का किराया 1200 रु. दिया हो तो चरागाह का कुल किराया ज्ञात कीजिए ?

Ans. तीनों गाये समान समय वर्ष भर चरती रही ।

हरिराम, मंगला और मानसिंह की गायों की

संख्या का कुल अनुपात : 250 : 300 : 150

5 : 6 : 3

अनुपातों की संख्याओं का योग = 14 रु.

माना चरागाह का कुल किराया = X रु.

मंगला का किराया :-

$$\frac{6X}{14} = 1200$$

$$6X = 1200 \times 14$$

$$6X = 16800$$

$$X = \frac{16800}{6}$$

$$X = 2800 \text{ रु.}$$

चारागाह का कुल किराया : 2800 रु.

प्रश्न ५ की विधि के अनुरूप प्रश्न :-

6. हरलाल, रामलाल और प्रेमलाल ने एक घास का मैदान किराये लिया । हरलाल ने 50 गाये वर्ष भर तक रामलाल ने 100 गाये 10 माह तक और प्रेमलाल ने 90 गाये 8 माह तक चरायी । यदि हरलाल ने अपने हिस्से का किराया 120 रु. दिया तो मैदान का कुल किराया ज्ञात कीजिए ?

7. कमल, विमल और अनिल ने मिलकर व्यापार में क्रमशः 2,40,000 रु., 3,00,000 रु. और 3,60,000 रु. पूंजी लगायी । यदि वर्ष के अन्त में कमल को लाभ के 50,000 रु. मिले तो विमल और अनिल का अलग-अलग लाभ ज्ञात कीजिए ?

Ans.

कमल	:	विमल	:	अनिल
2,40,000		30,000		3,60,000
24	:	30	:	36
4	:	5	:	6

: कमल का लाभ : विमल का लाभ : अनिल का लाभ

4 : 5 : 6

अनुपातों का योग : 4+5+6 =15

माना कुल लाभ = X रु.

$$\text{कमल का लाभ} = \frac{4}{15} \times X \times \frac{4X}{15}$$

$$50,000 = \frac{4X}{15}$$

$$X = \frac{50,000 \times 15}{4} = 1,25,000 \times 15$$

$$= 1,87,500 \text{ रु.}$$

$$\text{विमल का लाभ} : \frac{1,87,500}{15} \times 5$$

$$: 62,500 \text{ रु.}$$

$$\text{अनिल का लाभ} : \frac{1,87,500}{15} \times 6$$

$$: 12,500 \times 6 = 75,000 \text{ रु.}$$

प्रश्न ७ की विधि के अनुरूप प्रश्न :-

8. रमेश और महेश, प्रत्येक ने 12000 रु. लगाकर एक दुकान खोली । परन्तु 3 माह बाद महेश साझा छोड़कर चला गया उसके स्थान पर 7 मास बाद उतनी ही पूंजी लगाकर गोपाल साझेदार बन गया । वर्ष के अन्त में गोपाल को 4400 रु. का लाभ हुआ हो तो कुल लाभ ज्ञात कीजिए ?

9. एक व्यापार में 'क' ने 7 मास के लिए 50,000 रु., ख ने 6 मास के लिए 6000 रु. और ग ने 5 मास के लिए 8000 रु. लगाये । यदि वर्ष के अन्त में ख को 932 रु. लाभ के प्राप्त हुए हो तो 'क' तथा 'ग' का लाभ अलग अलग ज्ञात कीजिए ?

10. सलीम, करीम और हमीद ने सांझे में एक कारखान खोला । सलीम ने 50,000 रु. लगाये करीम ने सलीम से 7,500 रु.अधिक लगाये । यदि वर्ष के अंत में कुल लाभ 15,250 रु. का हुआ हो तो लाभ में से सबसे कम किसे मिला और कितना मिला ?

Ans. सलीम ने व्यवसाय में रु. लगाये : 50,000 रु.

Continue

करीम ने सलीम से 7500 रु. अधिक लगाये

$$= 50,000 + 7500 = 57,500 \text{ रु.}$$

हमीद ने करीम से 12,500 रु. कम लगाये

$$= 57,500 - 12,500 = 45,000 \text{ रु.}$$

सलीम की पूंजी	:	करीम की पूंजी	:	हमीद की पूंजी
50,000	:	57,500	:	45,000
20	:	23	:	18
सलीम का लाभ	:	करीम की पूंजी	:	हमीद की पूंजी
20	:	23	:	18

अनुपातों की संख्याओं का योग : $20+23+18 = 11$

वर्ष के अंत में कुल लाभा : 15250 रु.

लाभ में सलीम का भाग : $\frac{15,250}{61} \times 20$ रु.

$$: 250 \times 20 = 5000 \text{ रु.}$$

लाभ में करीम का भाग : $\frac{15,250}{61} \times 23$ रु.

$$: 250 \times 23 = 5750 \text{ रु.}$$

लाभ में हमीद का भाग : $\frac{15,250}{61} \times 18$ रु.

$$: 250 \times 18 = 4500 \text{ रु.}$$

सबसे कम लाभ हमीद को मिला = 4500 रु.

प्रश्न 90 के अनुरूप विधि से हल करें :-

11. प्रदीप ने 25,000 रु. लगाकर एक दुकान खोली । कुछ समय बाद प्रताप ने प्रदीप से दुगुना धन लगाकर साझा कर लिया । वर्ष के अन्त में लाभ इस प्रकार बांटा गया कि प्रदीप के लाभ का 7 गुना और प्रताप के लाभ का 6 गुना समान था तो बताओं प्रताप कितने माह बाद दुकान में सम्मिलित हुआ ? (संकेत : पूंजी का अनुपात उनके लाभ के अनुपात के तुल्य होता है ।
12. कमल ने 3000 रु. लगाकर एक दुकान खोली । 7 मास पश्चात्, ख ने 3000 रु. लगाकर साझा कर लिया । वर्ष के अन्त में उन दोनों का लाभ के रूप में 850 रु. मिले प्रत्येक का लाभ ज्ञात कीजिए ?

Ans.

कमल ने धन लगाया - 12 मास

ख ने धन लगाया - $12-7=5$ मास तक

दोनों का धन समान है अतः लाभ का बंटवारा = 12:5

अनुपातों का योग = $12+5 = 17$

कुल लाभ = 850 रु.

कमल का लाभ = $\frac{12}{17} \times 850$ रु. = $12 \times 50 = 600$ रु.

ख का लाभ = $\frac{5}{17} \times 850$ रु. = $5 \times 50 = 250$ रु.

प्रश्न 92 के अनुरूप विधि से हल करें :-

13. अशोक ने एक लाख रु. की पूंजी लगाकर एक फ़ैक्ट्री लगाई । तीन माह पश्चात् प्रतीक भी उतनी ही पूंजी लगाकर साझेदार बन गया । यदि वर्ष के अन्त में 18270 रु. का लाभ हुआ तो प्रत्येक का कितना कितना लाभ मिला ?
14. मोहन ने एक व्यापार में 50,000 रु. लगाये । 5 मास बाद सोहन भी 50,000 रु. लगाकर साझेदार बन गया । इसके 3 मास बाद रोहन भी 50,000 रु. लगाकर सम्मिलित हो गया । वर्ष के अन्त में रोहन को 8400 रु. का लाभ हुआ हो तो मोहन और सोहन के लाभ ज्ञात कीजिये ?

Ans.

मोहन का धन लगा रहा : 12 माह तक

सोहन का धन लगा रहा = $12-5=7$ माह तक

रोहन का धन लगा रहा = $7-3=4$ माह तक

धन की मात्रा समान है अतः लाभ का अनुपात

$$= 12 : 7 : 4 = 12+7+4 = 23$$

रोहन का लाभ = 8400 रु.

कुल लाभ = $\frac{8400}{4} \times 23 = 48,300$ रु.

सोहन का लाभ = $\frac{7}{23} \times 48,300 = 14,700$ रु.

$$\text{मोहन का लाभ} = \frac{12}{23} \times 48,300 = 25,200 \text{ रू.}$$

15. नर्मदा ने 5000 रू. लगाकर एक फैंसी स्टोर खोला । सात मास बाद कावेरी कुछ पूंजी लगाकर नर्मदा के साथ सम्मिलित हो गई । यदि वर्ष के अंत में उनके लाभ का अनुपात 10:7 था तो कावेरी की पूंजी ज्ञात कीजिए ?

Ans. माना कावेरी द्वारा लगाई गई पूंजी X रू. थी

$$\text{अतः नर्मदा व कावेरी के धन का अनुपात : } 50,000X \text{ 12 : X (12-7)} \\ \text{: 60,000 : 5 X}$$

वर्ष के अन्त में लाभ का अनुपात = 10 : 7 था

$$\text{पूंजी का अनुपात} = \text{लाभ का अनुपात}$$

$$60,000 : 5 X = 10 : 7$$

$$50 X = 60,000 \times 7$$

$$X = \frac{60,000 \times 7}{50} = 8,400 \text{ रू.}$$

कावेरी द्वारा लगाई गई पूंजी : 8,400 रू. थी ।

प्रश्न 98-99 की तरह हल करें :

16. विवेक ने 44,000 रू. लगाकर एक व्यापार प्रारम्भ किया ? चार मास पश्चात् विकास कुछ पूंजी लगाकर व्यापार में सम्मिलित हो गया । यदि वर्ष के अन्त में विवेक को, विकास कुछ पूंजी लगाकर व्यापार में सम्मिलित हो गया । यदि वर्ष के अन्त में विवेक को विकास के लाभ का चार गुना लाभ प्राप्त हुआ तो विकास ने कितनी पूंजी लगायी ?
17. नवीन ने 6500 रू. लगाकर एक व्यापार प्रारम्भ किया । कुछ समय बाद प्रवीण 3,900 रू. लगाकर व्यापार में सम्मिलित हो गया । यदि वर्ष के अंत में लाभ का बंटवारा 5 : 2 के अनुपात में किया गया हो तो ज्ञात कीजिए कि प्रवीण व्यापार में कब सम्मिलित हुआ ?
18. आशा और बीना प्रत्येक ने 30,000 रू. लगाकर प्रसाधान सामग्री की दुकान खोली । 7 मास बाद बीना साझे में से हर गयी और उसके स्थान पर अंजू उतनी ही पूंजी लगाकर दुकान में साझेदार बन गयी । वर्ष के अंत में 12,000 रू. का लाभ हुआ हो तो प्रत्येक का लाभ ज्ञात कीजिए ?

Ans. आशा का धन लगा रहा = 12 मास तक
 बीना का धन लगा रहा = 7 मास तक
 अंजू का धन लगा रहा = 5 मास तक
 तीनों के लाभ का अनुपात = 12 : 7 : 5
 अनुपातों का योग = 12 + 7 + 5 = 24
 वर्ष के अंत में कुल लाभ = 12,000 रू.

$$\text{लाभ में आशा का भाग} = \frac{12000}{24} \times 12$$

$$500 \times 12 = 6000 \text{ रू.}$$

$$\text{बीना का भाग} = \frac{12000}{24} \times 7 = 500 \times 7 = 3500 \text{ रू.}$$

$$\text{अंजू का भाग} = \frac{12000}{24} \times 5 = 500 \times 5 = 2500 \text{ रू.}$$

19. मोहन और गोविन्द क्रमशः 3600 रू. और 4800 रू. लगाकर व्यापार प्रारम्भ किया । मोहन सक्रिय साझेदार होने के कारण कुल लाभ का 10% प्राप्त करता है । यदि वर्ष के अंत में लाभ 3500 रू. हुआ तो बताओं मोहन को कितना लाभ मिलेगा ?

Ans. मोहन को सक्रिय साझेदार के रूप में दिया जाने वाला भाग

$$= 3500 \text{ का } 10\%$$

$$= 3500 \times \frac{10}{100} = 350 \text{ रू.}$$

$$\text{शुद्ध लाभ} = 3500 - 350 = 3150 \text{ रू.}$$

$$\text{मोहन और गोविन्द की पूंजी का अनुपात} = 3600 : 4800 = 3 : 4$$

$$\text{अनुपातों की संख्याओं का योग} = 3+4 = 7$$

$$\text{अतः लाभ में मोहन का भाग} = 350 + \left(3150 \times \frac{3}{7}\right)$$

$$= 350 + (450 \times 3) = 350 + 1350 = 1700 \text{ रू.}$$

मोहन को 1700 रू. लाभ होगा ।

20. नरेन्द्र और सुरेन्द्र क्रमशः 4500 रू. और 6000 रू. लगाकर व्यापार करते हैं । नरेन्द्र सक्रिय साझेदार है, उसे कुल लाभ का $\frac{2}{5}$ भाग मिलता है । यदि कुल लाभ 3500 रू. हुआ हो तो प्रत्येक का लाभ ज्ञात कीजिए ?

Continue

Ans. नरेन्द्र को सक्रिय साझेदार होने के कारण कुल लाभ का हिस्सा =

$$= 3500 \times \frac{2}{5} = 1400 \text{ रू.}$$
शुद्ध लाभ = 3500 - 1400 = 2100 रू.
नरेन्द्र की पूंजी : सुरेन्द्र की पूंजी
4500 : 6000 = 3 : 4
अनुपातों की संख्या का योग : 3+4 = 7
लाभ में नरेन्द्र का भाग = $1400 + (2100 \times \frac{3}{7}) = 1400 + (300 \times 3)$
 $1400 + 900 = 2300 \text{ रू.}$
सुरेन्द्र का भाग = $\frac{2100}{7} \times 4 = 300 \times 4 = 1200 \text{ रू.}$

21. रामलाल और श्यामलाल ने क्रमशः 30,000 रू. और 40,000 रू. लगाकर एक दुकान खोली। तीसरे मास की समाप्ति पर रामलाल ने 10,000 रू. हटा लिये और नौवें मास की समाप्ति पर श्यामलाल ने 1500 रू. और लगा दिये। यदि वर्ष के अंत में लाभ 7,049 रू. हुआ तो प्रत्येक का लाभ ज्ञात करो ?

Ans. रामलाल की पूंजी : $(30,000 \times 3) + (20,000 \times 9) = 90,000 + 1,80,000 \text{ रू.} = 2,70,000 \text{ रू.}$
श्यामलाल की पूंजी : $(40,000 \times 9) + (55,000 \times 3) = 3,60,000 + 1,65,000 \text{ रू.} = 5,25,000 \text{ रू.}$
रामलाल और श्यामलाल की पूंजी का अनुपात : 2,70,000 : 5,25,000 = 54 : 105 = 18 : 35
अनुपातों का योग : 18 + 35 = 53
कुल लाभ : 7049
रामलाल का लाभ = $\frac{18}{53} \times 7049 = 133 \times 18 = 2394 \text{ रू.}$
श्यामलाल का लाभ = $\frac{35}{53} \times 7049 = 4655 \text{ रू.}$

हल स्वयं करें :

22. अजहर और मजहर के एक साझे में क्रमशः 6500 रू. और 7800 रू. लगाये। अजहर के सक्रिय साझेदार होने के कारण 1200 रू. वार्षिक देना तय हुआ। यदि वर्ष के अंत में कुल लाभ 2,630 रू. हुआ हो तो प्रत्येक का लाभ ज्ञात कीजिए ?
23. मदन और अनिल ने व्यापार में समान पूंजी एक वर्ष के लिए लगाई। मदन को सक्रिय साझेदार होने पर कुल लाभ का 10% पारिश्रमिक देना तय हुआ वर्ष के अंत में हुए 10,000 रू. के लाभ में मदन को मिलने वाली राशि ज्ञात कीजिए ?

Lesson - 3

किस्तों में भुगतान

1. किस्त भुगतान पद्धति में ब्याज की दर ज्ञात करने के लिए एक माह के लिए समेकित मूलधन ज्ञात करके निम्न सूत्र का प्रयोग करते हैं :-

$$\text{दर} = \frac{\text{ब्याज} \times 100}{\text{मूलधन} \times \text{समय}}$$

2. यदि किस्त के साथ साधारण ब्याज की दर से ब्याज देय हो तो ब्याज ज्ञात करने का सूत्र है :-
ब्याज = मूल. X समय X दर / 100
3. यदि समान किस्त की राशि चक्रवृद्धि ब्याज की दर से X रू. हो तो प्रत्येक किस्त के लिए मूल. ज्ञात करने का सूत्र है :-
मूलधन = $X \div (1 + \frac{\text{दर}}{100})^{\text{समय}}$

- (1) 6000 रू. नगद या 2000 रू. तत्काल अदायगी तथा शेष राशि 1500 रू. की तीन समान मासिक किस्तों में चुकाये जाने के अनुबंध पर एक मशीन उपलब्ध है ब्याज की दर ज्ञात कीजिए ?

Ans. मशीन का नकद मूल्य = 6000 रू.
मासिक किस्तों में मशीन का मूल्य = $2000 + (1500 \times 3) = 2000 + 4500 = 6500 \text{ रू.}$
ब्याज की राशि = $6500 - 6000 = 500 \text{ रू.}$
प्रत्येक माह का मूलधन ज्ञात करने पर :-
पहले माह का मूलधन = $6000 - 2000 = 4000 \text{ रू.}$
दूसरे माह का मूलधन = $4000 - 1500 = 2500 \text{ रू.}$
तीसरे माह का मूलधन = $2500 - 1500 = 1000 \text{ रू.}$
1 माह का समेकित मूलधन = 7500 रू.
ब्याज की राशि = 500 रू.

$$\begin{aligned}
\text{ब्याज की दर} &= \frac{\text{ब्याज} \times 100}{\text{मूलधन} \times \text{समय}} \\
&= \frac{500 \times 100}{7500 \times \frac{1}{12}} \\
\frac{500 \times 100 \times 12}{7500} &= \frac{5 \times 4 \times 11}{3} = 5 \times 4 \times 4 \\
&= 80\% \text{ वार्षिक}
\end{aligned}$$

प्रश्न 9 के अनुसार हल करें :-

- एक साइकिल 2100 रु नगद या 500 रु. तत्काल अदायगी और शेष राशि 300 रु. की 6 मासिक किस्तों में उपलब्ध है । ब्याज की दर ज्ञात कीजिए ?
- एक घड़ी का नगद मूल्य 400 रु. है । परन्तु किस्त योजना में 100 की तत्काल अदायगी और 35 रु. की नौ मासिक किस्तों में उपलब्ध है । किस्त योजना में ब्याज की दर ज्ञात कीजिए ?
- मांगीलाल ने राजस्थान बैंक से 1,26,00 रु., भैसे खरीदने हेतु ऋण लिया । ऋण की मूल राशि तीन समान किस्तों में लौटानी है, जबकि प्रत्येक किस्त के साथ शेष राशि पर 12: वार्षिक साधारण ब्याज की दर से ब्याज देय है, प्रत्येक किस्त की राशि ज्ञात कीजिए ?

Ans. तीन समान किस्तों में भुगतान करना है ।

$$\text{अतः किस्त की राशि} = \frac{126000}{3} = 42000 \text{ रु.}$$

प्रथम किस्त के साथ 1,26,000 रु. का एक वर्ष का ब्याज देना होगा

$$\text{अतः ब्याज की राशि} = \frac{12600 \times 12 \times 1}{100} = 15120 \text{ रु.}$$

$$\text{शेष राशि} = 1,26,000 - 42000 = 84000$$

$$\text{दूसरे वर्ष में ब्याज की राशि} = \frac{84000 \times 12 \times 1}{100} = 10080 \text{ रु.}$$

$$\text{शेष राशि} = 84,000 - 42000 = 42000 \text{ रु.}$$

$$\text{तीसरे वर्ष की ब्याज राशि} = \frac{42000 \times 12 \times 1}{100} = 5040 \text{ रु.}$$

$$\text{पहली किस्त की राशि होगी} = 15,120 + 42000 = 57,120 \text{ रु.}$$

$$\text{दूसरी किस्त की राशि होगी} = 10,080 + 42000 = 52,080 \text{ रु.}$$

$$\text{तीसरी किस्त की राशि होगी} = 5,040 + 42000 = 47,040 \text{ रु.}$$

प्रश्न 8 की विधि से हल करें ।

- अल्का ने एक मकान 3 लाख रुपये में खरीदा । उसने 60,000 रु. तत्काल अदा कर दिये । शेष राशि तीन समान वार्षिक किस्तों में चुकाना तय हुआ जबकि प्रत्येक किस्त के साथ शेष राशि पर 12% वार्षिक साधारण ब्याज की दर से ब्याज देय है । प्रत्येक किस्त की राशि ज्ञात कीजिए ?
- एक मिक्सी 2100 रु. नगद या 600 रु. तत्काल अदायगी और 500 रु. की तीन समान किस्तों पर उपलब्ध है, जबकि प्रत्येक किस्त के साथ, शेष राशि पर 12% वार्षिक ब्याज देय है । किस्त योजना में मिक्सी का कुल कितना मूल्य देना होगा ।

Ans. मिक्सी का नगद मूल्य = 2100 रु.

$$\text{तत्काल अदायगी} = 600 \text{ रु.}$$

$$\text{शेष राशि} : 2100 - 600 = 1500 \text{ की तीन समान किस्तों में देना है ।}$$

प्रत्येक किस्त के साथ शेष राशि का सा. ब्याज की दर : 12%

$$\text{पहली किस्त के साथ 1500 रु. का एक माह का ब्याज} = \frac{1500 \times 12 \times 1}{100} = 15 \text{ रु.}$$

$$\text{पहली किस्त की कुल राशि} = 500 + 15 = 515 \text{ रु.}$$

$$\text{शेष राशि} = 1500 - 500 = 1000 \text{ रु.}$$

$$1000 \text{ रु. का एक माह का ब्याज} = \frac{1000 \times 12 \times 1}{100 \times 2} = 10 \text{ रु.}$$

$$\text{दूसरी किस्त की कुल राशि} = 500 + 10 = 510 \text{ रु.}$$

$$\text{शेष राशि} = 1000 - 500 \text{ रु. का एक एक माह का ब्याज}$$

$$\frac{500 \times 12 \times 1}{100 \times 2} = 5 \text{ रु.}$$

$$\text{तीसरी किस्त} = 500 + 5 = 505 \text{ रु.}$$

प्रश्न ६ की तरह हल करें ।

7. एक कूलर 3400 रु. नगद या 1000 रु. तत्काल अदायगी और शेष राशि तीन समान किस्तों में उपलब्ध है, जबकि प्रत्येक किस्त के साथ शेष राशि पर 9% वार्षिक साधारण ब्याज देय है । यदि मनीष किस्त योजना में कूलर खरीदता है तो उसे नगद मूल्य से कितनी राशि अधिक देनी पड़ेगी ?
8. 3000 रु. का एक विद्युत उपकरण इस शर्त पर खरीदा गया कि इसका मूलराशि को तीन समान मासिक किस्तों में लौटाया जायेगा और प्रत्येक किस्त के साथ शेष राशि पर 12% वार्षिक साधारण ब्याज दिया जायेगा । उपकरण का कुल मूल्य लिखिए ?
9. एक महाजन किसी किसान को 7000 रु. तीन समान वार्षिक किस्तों में लौटाने के अनुबन्ध पर उधार देता है । यदि इस सौदे में 20% चक्रवृद्धि ब्याज की दर से वसूल करना चाहे व ब्याज वार्षिक संयोजित करे तो निकटतम 10 रु. में प्रत्येक किस्त की राशि ज्ञात कीजिए ?

Ans. माना कि प्रत्येक वार्षिक किस्त की राशि X रु. है ।

$$\text{चक्रवृद्धि ब्याज का सूत्र} = \text{मिश्रधन} = \text{मूलधन} \div \left(1 + \frac{\text{दर}}{100}\right)^{\text{समय}}$$

$$\text{मूलधन} = \text{मिश्रधन} \div \left(1 + \frac{\text{दर}}{100}\right)^{\text{समय}}$$

$$\text{अब X मिश्रधन के लिए 1 वर्ष का मूलधन} = X \div \left(1 + \frac{20}{100}\right)^1$$

$$X \div \frac{120}{100} \text{ रु.} \quad X \div \frac{120}{100} \text{ रु.}$$

$$X \times \frac{100}{120} = \frac{100X}{120} \text{ रु.}$$

$$\text{अब X मिश्रधन के लिए 2 वर्ष का मूलधन} = X \div \frac{120}{100}^2 \text{ रु.}$$

$$X \times \frac{100}{120}^2 = X \div \frac{100}{120}^2 \text{ X रु.}$$

$$\text{इसी प्रकार 3 वर्ष का मूलधन} = X \div \left(\frac{1+20}{100}\right)^3 = \frac{100}{120}^3 \text{ X रु.}$$

$$\text{अतः किस्तों की कुल मूलधन} = \frac{100}{120} X + \frac{100}{120}^2 X + \frac{100}{120}^3 X$$

$$\text{परन्तु तीनों किस्तों का कुल मूलधन} = 7000 \text{ रु.}$$

$$\text{अतः प्रश्नानुसार :-} \quad \frac{100}{120} X + \frac{100}{120}^2 X + \frac{100}{120}^3 X = 7000$$

$$\frac{100}{120} X + 1 + \frac{100}{120} + \frac{10000}{14400} = 7000$$

$$\frac{100}{120} X \times \frac{36400}{14400} = 7000$$

$$X = 7000 \times \frac{120}{100} \times \frac{14400}{36400}$$

$$\frac{700 \times 12 \times 144}{364} = \frac{1209600}{364} = 3323 \text{ रु.}$$

निकटतम दस रु. में प्रत्येक किस्त की राशि होगी = 3323 रु.

प्रश्न ६ की तरह हल करें :-

10. सरिता ने मोटर साईकल खरीदने के लिए 25000 रु. की राशि, तीन समान वार्षिक किस्तों में लौटाने के अनुबंध से उधार ली यदि चक्रवृद्धि ब्याज की दर 15% तथा ब्याज वार्षिक, संयोजित किया जाता हो तो सरिता को प्रत्येक किस्त में कितनी राशि, निकटतम दस रु. में चुकानी पड़ेगी ।
11. भंवरलाल ने सिलाई मशीन हेतु 4500 रु. 12% चक्रवृद्धि ब्याज की दर से तीन समान वार्षिक किस्तों में लौटाने के अनुबंध पर उधार लिए । प्रत्येक किस्त की राशि निकटतम पूर्णांक में ज्ञात कीजिए ?
12. एक वाशिंग मशीन 8500 रु. नगद में उपलब्ध है । एक ग्राहक 2800 रु. नगद देता है और शेष राशि तीन समान वार्षिक किस्तों में लौटाने के अनुबंध करता है । यदि चक्रवृद्धि ब्याज की दर 10% हो तथा ब्याज वार्षिक संयोजित हो तो निकटतम 10 रु. में ज्ञात कीजिए ?

Ans. वाशिंग मशीन का मूल्य : 8500 रु.
 नगद दी गई राशि : 2800 रु.
 शेष राशि : 8500 - 2800 = 5700 रु.

5700 रु. की तीन समान किस्तों में दी जानी है । चक्रवृद्धि ब्याज दर 10% ब्याज का संयोजन वार्षिक प्रश्नानुसार :- माना कि प्रत्येक वार्षिक किस्त की राशि X रु. है ।

X मिश्रधन के लिए प्रथम वार्षिक किस्त का मूलधन

$$= X \div 1 + \frac{10}{100} = X \div \frac{110}{100}$$

$$= X \times \frac{100}{110} = \frac{100}{110} X = \frac{20}{22} X \text{ ----- (i)}$$

द्वितीय वार्षिक किस्त का मूलधन = $\frac{20}{22}^2 X$ ----- (ii)

तृतीय वार्षिक किस्त का मूलधन = $\frac{20}{22}^3 X$ ----- (iii)

(i) (ii) (iii) से कुल मूल. = $\frac{20}{22} X + \frac{20}{22}^2 X + \frac{20}{22}^3 X$

कुल मूलधन 2500 रु. है अतः = $\frac{20}{22} X + \frac{20}{22}^2 X + \frac{900}{484} = 5700 \text{ रु.}$

$$= \frac{20}{22} X \frac{1324}{484} = 2700 \text{ रु.}$$

$$X = 5700 X \frac{484}{1324} \times \frac{20}{22}$$

$$\frac{5700 \times 484 \times 11}{1324} = 2292.05 \text{ रु.}$$

निकटतम 10 रु. में किस्त की राशि : 2290 रु.

प्रश्न 92 की तरह हल करें :-

13. विकास 3000 रु. की साइकिल 500 रु. नगद तथा शेष राशि तीन समान वार्षिक किस्तों में देने के अनुबंध पर खरीदता है । यदि चक्रवृद्धि ब्याज दर 10% हो तथा ब्याज वार्षिक संयोजित किया जाता है । तो प्रत्येक किस्त की राशि निकटतम 10 रु. में ज्ञात कीजिए ?

14. एक व्यक्ति चक्रवृद्धि ब्याज की दर से कुछ धन उधार लेता है जिसे वह दो समान वार्षिक किस्तों में ही लौटाता है । यदि चक्रवृद्धि ब्याज की दर 5% वार्षिक हो तथा प्रत्येक किस्त की राशि 441 रु. हो तो उधार लिया गया धन ज्ञात कीजिए ?

Ans. प्रत्येक किस्त की राशि = 441 रु.

चक्रवृद्धि ब्याज की दर = 5%

किस्तों की संख्या 2% वार्षिक

प्रथम किस्त का मूलधन = किस्त की राशि $\div 1 + \frac{\text{दर}}{100}$ समय

$$= 441 \div 1 + \frac{5}{100} = 441 \div \frac{105}{100}$$

$$= 441 \times \frac{100}{105} = 420 \text{ रु.(1)}$$

द्वितीय किस्त का मूल. = $441 \times \frac{100}{120}^2 = 441 \times \frac{100}{105} \times \frac{100}{105}$

$$= 441 \times \frac{20}{21} \times \frac{20}{21} = 400 \text{ रु.(ii)}$$

दोनों किस्तों का मूल. = (i) + (ii) = 420 + 400 = 820 रु. मूलधन

16. 18000 रु. का T.V सैट इस अनुबंध पर खरीदा कि मूल राशि तीन समान वार्षिक किस्तों में लौटानी है तथा प्रत्येक किस्त के साथ साधारण ब्याज की दर से ब्याज देय है । यदि ब्याज की कुल राशि 3240 रु. हो तो ब्याज की दर ज्ञात कीजिए ?

Ans. T.V. सैट का नगद मूल्य = 18000 रु.

यह राशि तीन समान किस्तों में लौटानी है

प्रत्येक किस्त की मूल राशि = $\frac{18000}{3} = 6000 \text{ रु.}$

प्रथम किस्त की मूल राशि = 18000 रु.

द्वितीय किस्त की मूल राशि = 18000 - 6000 रु. = 12000 रु.

तृतीय किस्त की मूल राशि = 12000 - 6000 = 6000 रु.

1 वर्ष के समेकित मूल. राशि : 18000 + 12000 + 6000 = 36000 रु.

ब्याज की दर = $\frac{100 \times \text{ब्याज}}{\text{मूलधन} \times \text{समय}} = \frac{100 \times 3240}{36000 \times 1} = \frac{324}{36}$

= 9% समय

17. एक दुकान से एक पंखा समान किस्त योजना में खरीदा गया । यदि ब्याज की राशि 50 रु. वसूल की गई हो और ब्याज की दर 75% हो तो एक मास का समेकित मूल. लिखिए ?

Ans. ब्याज की राशि = 50 रु.
 ब्याज की दर = 75 रु.
 समय = $\frac{1}{12}$ वर्ष अर्थात 1 माह

$$\begin{aligned} \text{एक मास का समेकित मूलधन} &= \frac{100 \times \text{ब्याज}}{\text{समय} \times \text{दर}} \\ &= \frac{100 \times 50}{75 \times \frac{1}{12}} = \frac{100 \times 50 \times 12}{75} \\ &= 9 \times 50 \times 4 = 800 \text{ रु.} \end{aligned}$$

18. 36,000 रु. की एक मोटर साईकिल एक अनुबंध पर खरीदी गई कि इसकी मूलराशि को तीन समान मासिक किस्तों में लौटा दिया जायेगा यदि प्रत्येक किस्त के साथ शेष राशि पर 10% वार्षिक साधारण ब्याज की दर से ब्याज देय हो तो दूसरी किस्त की कुल राशि लिखिए ?

Ans. मोटर साईकिल का कुल मूल्य = 36,000 रु.
 किस्त योजना में इसका भुगतान तीन समान मासिक किस्तों में करने पर
 एक किस्त की राशि = $36000 \div 3 = 12,000$ रु.
 प्रथम किस्त के साथ 12,000 चुकाने पर शेष राशि रही = $36,000 - 12,000 = 24,000$ रु.
 दूसरी किस्त के साथ 24,000 का 1 माह का साधारण ब्याज देना होगा : ब्याज = मूल. X समय X दर

$$24000 \times \frac{1}{12} \times \frac{10}{100} = 200 \text{ रु.}$$

दूसरी किस्त की कुल राशि होगा = $12,000 + 200 = 12,200$ रु.

Lesson - 4

चक्रवृद्धि ब्याज, वृद्धि व ह्रास दर

यदि P = मूलधन, R = ब्याज की दर, t = समयावधि और A = मिश्रधन को व्यक्त करें ।

$$\begin{aligned} \text{मिश्रधन} &= \text{मूलधन} \left(1 + \frac{\text{दर}}{100} \times \text{समय}\right) \\ &= P \left(1 + \frac{R}{100} t\right) \\ \text{चक्रवृद्धि ब्याज} &= (A - P) = P \left(1 + \frac{R}{100} t\right) - P \\ \text{चक्रवृद्धि ब्याज} &= P \left[1 + \frac{R}{100} t - 1\right] \end{aligned}$$

जब ब्याज को चुकाने की अवधि छः माही हो तो उक्त सूत्र का प्रयोग करने में ब्याज की दर (R) को आधा और समय (T) को दुगना कर दिया जाता है ।

$$A = P \left(1 + \frac{1/2 R}{100} 2t\right)$$

जब ब्याज चुकाने की अवधि तिमाही होती है तो ब्याज एक वर्ष में चार बार जोड़ा जाता है । इस प्रकार ब्याज की वार्षिक दर (R) को तिमाही बनाने के लिए 4 का भाग दर में लगा देते हैं और समय 1 वर्ष = 4 तिमाही (त्रैमासिक) के बराबर अर्थात $R = R/4$ और $T = 4$, एक वर्ष के लिए हो जाता है ।

$$\text{मिश्रधन} = A = P \left(1 + \frac{1/4 R}{100} 4t\right)$$

यदि शर्त हो तो =

$$\text{वृद्धि } P = P_0 \left(1 + \frac{R}{100} t\right)$$

$$\text{ह्रास } P = P_0 \left(1 - \frac{R}{100} t\right)$$

P₀ प्रारम्भिक राशि है तथा t पश्चात् राशि है ।

1. 2000 रु. का 2 वर्ष का 12% चक्रवृद्धि ब्याज की दर से मिश्रधन ज्ञात कीजिए ? (ब्याज चुकाने की अवधि वार्षिक)

Ans. मिश्रधन A = $P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^t$

(P) मूलधन=2000 रु., = (R) दर=12, समय (t) = 2 वर्ष

$$= 2000 \left(1 + \frac{12}{100}\right)^2$$

$$= 2000 \frac{112}{100}^2$$

$$= 2000 \times \frac{112}{100} \times \frac{112}{100} = \frac{12544}{5} = 2508.80 \text{ रु.}$$

2. चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए ?

1000 रु. का 2 वर्ष का 14% की दर से

Ans मिश्रधन A = मूलधन $1 + \frac{\text{दर}}{100}$ समय

$$= 1000 \left(1 + \frac{14}{100}\right)^2$$

$$= 1000 \frac{114}{100}^2$$

$$= 1299.60 \text{ रु}$$

चक्रवृद्धि ब्याज = 1299.60 – 1000 = 299.60 रु.

3. चक्रवृद्धि ब्याज और मिश्रधन ज्ञात कीजिए ? (शर्त वार्षिक)

670 रु. का 2 वर्ष का 16% की दर से

Ans. मिश्रधन A = मूलधन $1 + \frac{\text{दर}}{100}$ समय

$$= 670 \left(1 + \frac{16}{100}\right)^2 = 670 \frac{116}{100}^2$$

$$= 670 \times \frac{116}{100} \times \frac{116}{100}$$

$$= 67 \times \frac{13456}{1000} = 901.55 \text{ रु.}$$

$$= \text{मिश्रधन} = 901 \text{ रु. } 55 \text{ पैसे}$$

चक्रवृद्धि ब्याज = 901.55 – 670 = 231.55 रु.

प्रश्न चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए जबकि ब्याज चुकाने की अवधि प्रति वर्ष है :- (शर्त वार्षिक)

500 रु. का 1½ वर्ष का 12% की दर से

चक्रवृद्धि ब्याज = मूलधन $1 + \frac{\text{दर}}{100}$ समय – मूलधन

$$= 500 \left(1 + \frac{12}{100}\right)^{3/2} - 500$$

$$= 500 \frac{112}{100}^{3/2} - 500$$

$$= 500 \frac{112}{100} \frac{106}{100} - 500$$

$$= 593.60 - 500$$

चक्रवृद्धि ब्याज = 93.60 रु.

4. 1500 रु. का 1¼ का 16% की से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए (ब्याज चुकाने की अवधि प्रतिवर्ष)

Ans. चक्रवृद्धि ब्याज = मूलधन $1 + \frac{\text{दर}}{100}$ समय – मूलधन

$$= 1500 \left(1 + \frac{16}{100}\right)^{1\frac{1}{4}} - 1500$$

$$= 1500 \frac{116}{100}^{1\frac{1}{4}} - 1500$$

$$= 1500 \frac{116}{100} \frac{104}{100} - 1500$$

$$\frac{15 \times 116 \times 26}{25} - 1500$$

$$= 1809.60 - 1500$$

$$= 309.60 \text{ रू.}$$

- (5) विष्णुदत्त ने 20,000 रू. 2¼ वर्ष की अवधि के लिए 8% की दर से चक्रवृद्धि ब्याज पर उधार लिये। यदि ब्याज चुकाने की अवधि प्रतिवर्ष होतो बताओं उसने कितना धन चुकाया ?

Ans. मूल. = 20,000 रू., समय 2¼ वर्ष, दर 8%

$$\text{मिश्रधन} = \text{मूलधन} \left(1 + \frac{\text{दर}}{100} \times \text{समय}\right)$$

$$= 20,000 \left(1 + \frac{8}{100} \times \frac{9}{4}\right)$$

$$= 20,000 \times \frac{108}{100} \times \frac{9}{4}$$

$$= 20,000 \times \frac{108}{100} \times \frac{108}{100} \times \frac{102}{100}$$

$$\text{मिश्रधन} = 23794.56 \text{ रू.}$$

- (6) 12,500 रू. 2½ वर्ष के लिए हरीश ने पोस्ट ऑफिस से जमा कराये। चक्रवृद्धि ब्याज की दर 10% हो और ब्याज वार्षिक देय हो तो समय समाप्ति पर हरीश को कुल कितनी राशि मिलेगी ?

Ans. मूल. = 12,500 रू. समय = 2½ वर्ष, दर 10%

$$\text{मिश्रधन} = \text{मूलधन} \left(1 + \frac{\text{दर}}{100} \times \text{समय}\right)$$

$$= 12,500 \left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{5}{2}\right)$$

$$= 12,500 \left(1 + \frac{10}{100} \times \frac{5}{2}\right) = 12,500 \times \frac{110}{100} \times \frac{5}{2}$$

$$= 12,500 \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100} \times \frac{105}{100}$$

$$\frac{5 \times 11 \times 11 \times 105}{4} = 15,881.25 \text{ रू.}$$

- (7) यदि ब्याज चुकाने की शर्त अर्द्धवार्षिक हो तो मिश्रधन ज्ञात कीजिए ?
2000 रू. का 1 वर्ष का 12% की दर से

Ans. मूलधन = 2000 रू., दर = 12%, वार्षिक = 6% अर्द्धवार्षिक
समय = 1 वर्ष (दो छः माही)

$$\text{मिश्रधन} = \text{मूलधन} \left(1 + \frac{\text{दर}}{100} \times \text{समय}\right)$$

$$= 2000 \left(1 + \frac{6}{100} \times 2\right) = 2000 \times \frac{106}{100} \times 2$$

$$= 2000 \times \frac{106}{100} \times \frac{106}{100} = 2247.20 \text{ रू.}$$

- (8) यदि रोहित ने 3000 रू. एक वर्ष के लिए 10% की दर से उधार दिये। वह 1 वर्ष में क्या कमायेगा ? यदि ब्याज अर्द्धवार्षिक देय हो ?

Ans. मूल. = 3000 रू., समय = 1 वर्ष \times 2 = छः माही दर 5% (अर्द्धवार्षिक)

$$\text{मिश्रधन A} = 3000 \left(1 + \frac{\frac{R}{2}}{100} \times 2\right)$$

$$= 3000 \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100} = 3307.50 \text{ रू.}$$

$$\text{चक्रवृद्धि ब्याज} = 33.750 - 3000 = 307.50 \text{ रू.}$$

- (9) यदि ब्याज चुकाने की अवधि त्रैमासिक हो तो चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए ?

Ans. 1250 रू. का 6 मास का 12% की दर से

$$\text{मूलधन} = 1250 \text{ रू., दर} = 12\% = 12 \div 3 = 4\% \text{ , समय छः मास, 2 किस्त, शर्त (त्रैमासिक)।}$$

$$\begin{aligned} \text{चक्रवृद्धि ब्याज} &= \text{मूलधन} \left(1 + \frac{\text{दर}}{100}\right)^{\text{समय}} - \text{मूल.} \\ &= 1250 \left(1 + \frac{3}{100}\right)^2 - 1250 \\ &= 1250 \times \frac{130}{100} \times \frac{103}{100} - 1250 \end{aligned}$$

$$\text{चक्रवृद्धि ब्याज} = 1326.13 - 1250 = 76.13 \text{ रू.}$$

(10.) सुगनचन्द ने 12% की दर से 1600 रू. उधार लिये । 1 वर्ष के पश्चात् अंत में उसे ब्याज सहित कितनी राशि चुकानी पड़ेगी ? जबकि ब्याज भुगतान की शर्त त्रैमासिक हो

Ans. दर $\frac{12}{4} = 3\%$

मूलधन = 160 रू., समय = $1 \times 4 = 4$

मिश्रधन =

$$= 1600 \left(1 + \frac{3}{100}\right)^4 = 1600 \frac{103}{100}^4$$

$$= 1600 \times \frac{103}{100} \times \frac{103}{100} \times \frac{103}{100} \times \frac{103}{100}$$

$$= \frac{103 \times 103 \times 103 \times 103}{25 \times 25 \times 100}$$

$$= \frac{112550881}{62500}$$

मिश्रधन = 1800.81 रू.

11. 1000 रू. को 10% चक्रवृद्धि ब्याज की दर से उधार देने पर 332 रू. ब्याज के रूप में प्राप्त होते हैं । यदि ब्याज देय हो तो समय ज्ञात कीजिए ?

Ans. मिश्रधन = $1000 + 331 = 1331$ रू., मूलधन = 1000 रू., दर = 10% समय = ?

प्रश्नानुसार

$$A = P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^t$$

$$1331 = 1000 \left(1 + \frac{10}{100}\right)^t$$

$$1331 = 1000 \frac{110}{100}^t$$

$$\frac{11}{10}^3 = \frac{11}{10}$$

आधार समान होने पर $T=3$ अतः समय = 3 वर्ष

प्रश्न 13. 1200 रुपये, कितने वर्ष पश्चात् 1728 रुपये हो जायेंगे यदि चक्रवृद्धि ब्याज वार्षिक देय हो ।

प्रश्न 14. कोई, कितने प्रतिशत चक्रवृद्धि ब्याज की दर 2 वर्ष में 672 रुपये और 3 वर्ष में 714 रुपये हो जाता है । जबकि ब्याज वार्षिक देय है।

Ans. तीन वर्ष का मिश्रधन = 714 रुपये तथा

2 वर्ष का मिश्रधन = 672 रुपये

अन्तर = 042 रुपये

042 रू. 672 रू. का एक वर्ष का साधारण ब्याज है

$$\text{दर} = \frac{100 \times 042}{672 \times 1} = 6.25\% \text{ Ans.}$$

प्रश्न 98. की तरह हल करें ।

प्रश्न 15. कितने प्रतिशत ब्याज की दर से व 2 वर्ष में 1600 रुपये, 1852.20 रुपये हो जायेंगे ।

प्रश्न 16 कोई धन 10% चक्रवृद्धि ब्याज की दर से $1\frac{1}{2}$ वर्ष में 9261 रुपये हो जाता है । वह धन ज्ञात कीजिए, जबकि ब्याज अर्द्धवार्षिक देय है।

यहाँ $P = ? = 10\%$ समय $1\frac{1}{2}$ वर्ष, $A = 9261$ रू.

Ans. ब्याज अर्द्धवार्षिक देय हैं।

$$\text{सुत्र} = AP \left[1 + \frac{R}{100} \right]^{2XT}$$

$$\text{या } 9261 = P \left[1 + \frac{10}{100} \right]^3$$

$$\text{या } 9261 = P \left[1 + \frac{5}{100} \right]^3$$

$$\text{या } 9261 = P \left[\frac{105}{100} \right]^3$$

$$\text{या } 9261 = P \left[\frac{21}{20} \right]^3$$

$$9261 = P \times \frac{9261}{8000}$$

अतः मूलधन $P = 8000$ रु

प्र. 17 किसी धन पर 10% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष को चक्रवृद्धि ब्याज तथा साधारण ब्याज में 50 रु. का अन्तर है। वह धन ज्ञात कीजिए।

$$\text{साधारण ब्याज} = \frac{P \times T \times R}{100} \quad \text{माना मूलधन} = X$$

$$\frac{X \times 10 \times 2}{100} = \frac{X}{5} \text{ रु.}$$

$$\text{चक्रवृद्धि ब्याज} = X \left[\frac{110}{100} \right]^2 - X$$

$$\frac{121X}{100} - X$$

$$\frac{121X - 100X}{100} = \frac{21X}{100}$$

$$\text{प्रश्नानुसार च. ब्याज} - \text{साधारण ब्याज} = 50 = \frac{21X}{100} - \frac{X}{5} = 50$$

$$\text{या } 105X - 100X = 50 \times 50$$

$$5X = 50 \times 50$$

$$X = \frac{50 \times 500}{5} = 5000 \text{ रु.}$$

प्र. 18. कोई धन चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 2 वर्ष में 7350 रुपये और 3 वर्ष में 8575 रुपये हो जाता है। वह धन एवं दर ज्ञात कीजिए ?

$$\left[\text{संकेत } \frac{X \left(1 + \frac{R}{100} \right)^3}{X \left(1 + \frac{R}{100} \right)^2} = \frac{8500}{7350} \right]$$

$$\text{Ans. माना धन } X \text{ है अतः } = 7350 \left(1 + \frac{R}{100} \right)^2$$

$$8575 \left(1 + \frac{R}{100} \right)^3$$

$$\text{समी. (i) (ii) से } \frac{8575}{7350} = \frac{\frac{100+R}{100}^3}{\frac{100+R}{100}^2}$$

$$\frac{100+R}{100} = \frac{8575}{7350}$$

$$100+R = \frac{8575}{7350} \times 100$$

$$100+R = 116.66$$

$$R = 16.66\%$$

$$\text{पुनः } 7350 = X \left(1 + \frac{16.66}{100} \right)^2$$

$$7350 = X \frac{350}{300}^2 = \frac{7}{6}^2$$

Continue

$$7350 = X \frac{49}{36}$$

$$X = \frac{7350 \times 36}{49} = 5400 \text{ रू.}$$

- प्र. 19. कोई धन चक्रवृद्धि ब्याज 12% की दर से 2 वर्ष में 1590 रू. हो जाता है। च. ब्याज ज्ञात कीजिए ?
Ans. सूत्रानुसार

$$A = P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^n$$

$$1590 = X \left(1 + \frac{12}{100}\right)^2$$

$$1590 = X \frac{112}{100}^2$$

$$1590 = X \frac{28}{25}^2$$

$$1590 = X \times \frac{784}{625}$$

$$X = \frac{1590 \times 625}{784} = 1267.50 \text{ रू.}$$

$$\text{च. ब्याज} = 1590 - 1267.50 = 322.50 \text{ रू.}$$

- प्र. 20. प्रारम्भिक मान = 16,000 रू., प्रतिवर्ष की वृद्धि दर = 5% 3 वर्ष बाद अंतिम मान ज्ञात करो ?

$$\text{अंतिम मूल्य} = X \left(1 + \frac{R}{100}\right)^t$$

$$= \text{प्रारम्भिक मूल्य} \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100}$$

$$= 16000 \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100} \times \frac{105}{100}$$

$$= 18,522 \text{ रू.}$$

21. विद्यालय में छात्रों की संख्या प्रथम वर्ष 500 रू., द्वितीय वर्ष = 625 रू., तृतीय वर्ष = 580 रू. द्वितीय वर्ष की वृद्धि दर व तृतीय वर्ष की वृद्धि दर व ज्ञात कीजिए ?

$$\text{Ans. द्वितीय वर्ष की वृद्धि दर} = \frac{625-500}{500} \times 100$$

$$= \frac{125}{500} \times 100 = +25\%$$

$$\text{तृतीय वर्ष की वृद्धि दर} = \frac{588-625}{625} \times 100$$

$$= \frac{-37}{625} \times 100 = 5.92\%$$

Lesson - 5

बहुपद के गुणनखण्ड

1 a^3+b^3 तथा a^3-b^3 के गुणनखण्ड

(A) $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

इसी प्रकार

(B) $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

(C) $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$

(D) यदि $(a+b+c) = 0$ हो तो $a^3+b^3+c^3=3abc$

(E) शेषफल प्रमेय :- यदि X के घनात्मक पूर्णांक धातो वाले किसी व्यंजक में जब $(X-p)$ से भाग दिया जाता है तो व्यंजक में $X=p$ प्रतिस्थापित करने से जो शेषफल प्राप्त हो जाता है, इसी को शेषफल प्रमेय कहते हैं

1. $27X^3 + 125y^3$

Ans. $(3x)^3 + (5y)^3 = (3x+5y)[(3x)^2 - (3x)(5y) + (5y)^2]$

$$= (3X+5y) (9X^2-15Xy+25y^2)$$

2. $(2m+1)^3 + (M-1)^3$ { $a^3+b^3 = (a+b) (a^2-ab+b^2)$ }

Ans. $[(2m+1)+m-1] [(2m+1)^2-(2m+1)(m-1)+(m-1)^2]$
 $= (3m) (4m^2+4m+1-(2m^2+m-2m-1)+m^2-2m+1)$
 $= (3m) (4m^2+4m+1-2m^2+m+1+m^2-2m+1)$
 $= (3m) (3m^2+3m+3)$
 $= 9m (m^2+m+1)$

3. $8X^3y-343y$ { $a^3+b^3 = (a+b) (a^2+ab+b^2)$ }

Ans. $y(8x^3-343) = y[(2x)^3-(7)^3]$
 $= Y(2x-7) [(2X)^2+2XX7+(7)^2]$
 $= y (2x-7) (4X^2+14X+49)$

4. $a^6-b^6 = (a^2)^3-(b^2)^3$

Ans. $= (a^2-b^2) [(a^2)^2+a^2b^2+(b^2)^2]$
 $= (a^2-b^2) (a^4+a^2b^2+b^4)$
 $= a^3b (a+b) (a-b) (a^4+a^2b^2+b^4+a^2b^2-a^2b^2)$
 $= (a+b) (a-b) [(a^2+b^2)-(ab)^2]$
 $= (a+b) (a-b) (a^2+b^2+ab) (a^2+b^2-ab)$

5. $X^3+8y^3+64z^3-24Xyz$ { $A^3+B^3+C^3-3abc = (A+B+C) (A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)$ }

Ans. $X^3+8y^3+64z^3-24Xyz$
 $= (X^3) + (2Y)^3+(4Z)^3-3 (X) (2y) (4Z)$
 $= (X+2y+4z) [(X^2)+(2y)^2+(4z)^2-XX2y-2Yx4Z-XX4Z]$
 $= (X+2y+4z) [X^2+4y^2+16z^2-2XY-84Z-AXZ]$

6. $27X^3-y^3-1-9Xy$

Ans. $(3X^3)+(-Y)^3+(-1)^3-3 (3X) (-y) (-1)$
 अतः $(3X -Y-1)+[(3X)^2+(-Y)^2+(-1)^2-(3X) (-y) (-y) (-1)-(-1) (3X)]$
 $(3X -Y-1)+(9X^2+Y^2+1+3Xy-y+3X)$

7. $(2X-Y)^3+(y-3z)^3+(3z-2X)^2$ { $A+B+C=0$ $A^3+B^3+C^3=3ABC$ }

Ans. माना $(2X-Y) = a$ $(y-3z) = b$ तथा $(3z-2X) = c$
 अतः $a+b+c = 2X-y+y-3z+3z-2X=0$
 अतः $a^3+b^3+c^3 = 3abc$
 $(2X-y)^3+(y-3z)^3+(3z-2X)^3 = 3(2X-y) (y-3z) (3z-2X)$
 (यदि $a+b+c=0$ है तो $a^3+b^3+c^3=3abc$ होगी)

8. X^3-5X^2+2X+8

Ans. विषम स्थानों के पदों के गुणांकों का योग $S_o = 1+2=3$

समस्थानों के पदों के गुणांकों का योग $S_e = 8-5=3$

अतः $S_o = S_e$

अतः $X+1$ एक गुणनखण्ड हो सकता है ।

उपसूत्र आधयम आदयेन अन्त्यम अन्त्येन द्वारा

$$\frac{X^3}{X} = X^2 \text{ तथा } \frac{8}{1} = 8 \text{ अतः दूसरा गुणनखण्ड } = (X^2+px+8)$$

यहां P का मान ज्ञात करने के लिए

$$X^3-5X^2+2X+8 = (X+1) (X^2+PX+8)$$

$$X^3-5X^2+2X+8 = X^3+PX^2+8X+X^2+PX+8$$

दोनों पक्षों की तुलना करने पर (X^2) के गुणांक की तुलना

$$PX^2-X^2 = -5X^2$$

$$P+1 = -5 \quad P = -6$$

(X का गुणांक की तुलना)
या $PX-8X= 2X$
 $P+8=2$ $P=-6$

अतः व्यंजक $(X+1)(X^2-6X+8)$
 $= (X+1)(X^2-4X-2X+8)$
 $= (X+1)X(X-4)-2(X-4)$
 $= (X+1)(X-2)(X-4)$

प्र. 9 $X^3-6X^2+3X+10$

व्यंजक में $X=-1$ रखने पर $(-1)^3-6(-1)^2+3(-1)+10$ इसका मान शून्य हो जाता है अतः $(X+1)$ व्यंजक का एक गुणनखण्ड होगा । अतः सूत्र आध्यम आदयेन अन्त्यम् अन्त्येन द्वारा

$\frac{X^3}{X}=X^2$ तथा $=\frac{10}{1}=1$ अतः दूसरा गुणनखण्ड $= X^2+px+10$ होगा

अतः P का नाम ज्ञात करने के लिए

$X^3-6X^2+3X+10 = (X+1)(X^2+PX+10)$
 $X^3-6X^2+3X+10 = X^2+PX^2+10X+X^2+PX+8$

दोनों पक्षों की तुलना करने पर

$PX^2-X^2 = -6X^2$
 $P+2 = -6 = P = -7$

अथवा $PX-10X = 3X$
 $P+10=3$ अतः $P=-7$

अतः व्यंजक $(X+1)(X^2-7X+10)$
 $= (X+1)(X^2-5X-2X+10)$
 $= (X+1)X(X-5)-2(X-5)$
 $= (X+1)(X-2)(X-5)$

प्र. 10. X^3+4X^2+X-6

प्र. 11. $X^3+4X^2-11X-30$?

प्र. 12. भाग की सामान्य विधि से तथा शेषफल प्रमेय विधि से शेषफल ज्ञात कीजिए जबकि $F(X)$ में $0Y(X)$ का भाग दिया जाए । इसकी भी जांच कीजिए कि दोनों विधियों से प्राप्त शेषफल समान होते हैं ।

(i) $F(X)=4X^3-3X^2+2X-1$; $g(X)=X+2$

(ii) $F(X)=8X^3+4X^2-2X-15$; $g(X)=2X-1$

Ans. $F(X)=4X^3-3X^2+2X-1$ में $X=-2$ मान रखने पर

$F(2)=4(-2)^3-3(-2)^2+2(-2)-1$
 $= -32-12-4-1=-49$

$F(X)$ में $(X+2)$ का भाग देने पर

$$\begin{array}{r} 4X^2-11X+24 \\ X+2 \overline{) 4X^3-3X^2+2X-1} \\ \underline{4X^2+8X^2} \\ -11X^2+2X \\ \underline{-11X^2-22X} \\ + \\ 24X-1 \\ \underline{24X-48} \\ -49 \text{ शेषफल} \end{array}$$

प्र. 14. शेषफल प्रमेय का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित बहुपदों के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए ?

(i) $2X^3-X^2-13X-6$

(ii) Y^3-7y+6

$F(X)=2X^3-X^2-13X-6$

$X = -2$ मान रखने पर

$2(-2)^3-(-2)^2-13(-2)-6$

$= -16-4+26-6 = 0$

$F(X) = (X+2)$ एक गुणनखण्ड होगा ।

$$\begin{aligned}
&= 2X^3 + 4X^2 - 5X^2 - 10X - 3X - 6 \\
&= 2X^2(X+2) - 5X(X+2) - 3(X+2) \\
&= (X+2)(2X^2 - 6X + X - 3) \\
&= (X+2)[(2X(X-3) + 1(X-3))] \\
&= (X+2)(X-3)(2X+1)
\end{aligned}$$

(ii) $F(X) = y^3 - 7y + 6$

दिये गये व्यंजक में $Y=11$ रखने पर

$$= (a)^3 - 7(1) + 6$$

$$= 1 - 7 + 6 = 0$$

$(Y-1)$ दिये गये व्यंजक का एक गुणनखण्ड होगा ।

अब हम दिये गये व्यंजक के पदों को दो-दो में इस प्रकार समूहित करते हैं कि इनमें $(Y-1)$ सार्वगुणनखण्ड हो जाये ।

$$Y^2(y-1) + Y(y-1) + 6(Y-1)$$

$$= (y-1)(y^2 + y - 6)$$

$$= (y-1)(y^2 + 3y - 2y - 6)$$

$$= (y-1)[y(y+3) - 2(y+3)]$$

$$= (y-1)(y-2)(y+3) \text{ Ans.}$$

प्र. 15 यदि $(X-1)$ तथा $(X+2)$ बहुपद $2X^3 + mX^2 + nX - 14$ के गुणनखण्ड हैं तो m तथा n के मान ज्ञात कीजिए ?

Ans. माना कि $F(X) = X^3 + m^2 + nx - 14$ है ।

$(X-1)$ तथा $(X+2)$ $F(X)$ के गुणनखण्ड होने चाहिए

$$F(1) = f(-2) = 0$$

$$F(1) = 2(1)^3 + m + n - 14 = 0$$

$$m + n - 12 = 0 \text{ (i)}$$

$$F(-2) = 2(-2)^3 + 4m - 2n - 14 = 0$$

$$\text{या } 4m - 2n - 30 = 0 \text{ (ii)}$$

समी. (i) व (ii) से

$$m + n = 12 \text{ (iii)}$$

$$2m - n = 15 \text{ (iv)}$$

$$3m = 27 \text{ अतः } m = 9$$

समी. (iii) $n = 3$

प्र. 16 यदि व्यंजक $X^3 - 2X + 1$ का एक भाजक $(X-1)$ हो तो शेषफल लिखिए ।

Ans. व्यंजक $F(X) = X^3 - 2X + 2$ का एक गुणनखण्ड $(X-1)$ है ।

$$F(1) = (1)^3 - 2 \times 1 + 1$$

$$= 1 - 2 + 1 = 0$$

अतः शेषफल शून्य होगा ।

Lesson - 6

बहुपदों के महत्तम समापर्वतक व लघुतम समापर्वतक

(1) दो या इससे अधिक बीजीय पदों के गुणनखण्डों के उभयनिष्ठ गुणनखण्ड म.स.प. कहलाते हैं ।

(2) ल.स.प. = दो या दो से अधिक बीजीय पदों के गुणनखण्डों के अभाज्य गुणनखण्डों की अधिकतम घातों के गुणनफल ल.स.प. के तुल्य होता है ।

(3) दो राशियों का गुणनफल = ल.स.प. \times म.स.प.

$$P(X) \times q(X) = L.C.M. \times H.C.M.$$

1. $6X^4 - 1$, $X^2 + 1$ का म.स.प. ज्ञात करो ?

$$P(X) = X^4 - 1 \quad q(X) = (X^2 + 1)$$

$$= (X^2 + 1)(X^2 - 1)$$

$$= (X^2 + 1)(X + 1)(X - 1) \text{ उभयनिष्ठ गुणनखण्ड } (X^2 + 1)$$

$$\text{अतः म.स.प.} = X^2 + 1$$

2. $X^2 - 7X + 12$, $X^2 - 10X + 21$, $X^2 + 2X - 15$ म.स.प. ज्ञात करो ?

$$P(X) = X^2 - 7X + 12$$

$$= X^2 - 4X - 3X + 12$$

$$= X(X - 9) - 3(X - 4)$$

$$= (X - 3)(X - 4)$$

$$\begin{aligned}
q(X) &= X^2 - 10X + 21 \\
&= X^2 - 7X - 3X + 21 \\
&= X(X-7) - 3(X-7) \\
&= (X-7)(X-3) \\
r(X) &= X^2 + 2X - 15 \\
&= X^2 + 5X - 3X - 15 \\
&= X(X+5) - 3(X+5) \\
&= (X-3)(X-5)
\end{aligned}$$

$P(X)$, $q(X)$, $r(X)$ में उभयनिष्ठ भाजक = $(X-3)$

$$\text{अतः म.स.प.} = (X-3)$$

3. $X^3 - 3X^2 - 9X + 27$ तथा $X^2 - 6X + 9$ का म. स. ज्ञात कीजिए ?

$$\text{Ans. } P(X) = X^3 - 3X^2 - 9X + 27$$

$X=3$ रखने पर व्यंजक का मान शून्य हो जाता है $(X-3)$ का गुणनखण्ड होगा

$$\text{अतः } X^3 - 3X^2 - 9X + 27$$

$$= X^2(X-3) - 9(X-3)$$

$$= (X-3)(X^2-9)$$

$$= (X-3)(X+3)(X-3)$$

$$q(X) = X^2 - 6X + 9$$

$$= X^2 - 3X - 3X + 9$$

$$= X(X-3) - 3(X-3)$$

$$= (X-3)(X-3)$$

$$= (X-3)^2$$

दोनों व्यंजकों में $(X-3)$ उभयनिष्ठ है अतः $(X-3)$ म.स. प. होगा

4. व्यंजक से $X^2 - 2X - 15$ तथा $X^2 - 5$ का म.स. $X-5$ है । तो a का मान ज्ञात कीजिए ?

$$P(X) = X^2 - 2X - 15$$

$$= X^2 - 5X + 3X - 15$$

$$= X(X-5) + 3(X-5)$$

$$= (X-5)(X+3) \text{ यदि } (X-5) P(X), Q(X) \text{ का म.स.प. है तो } Q(X), (X-5) \text{ से भाज्य होगा}$$

तथा $q(X) = X^2 - aX - 5$ का म.स.प. यदि $X-5$ हो तो $q(X)$ में $X=5$ रखने पर $q(5)=0$ होगा

$$q(X) = \frac{(X^2 - aX - 5)}{(X-5)}$$

$$X-5 \sqrt{X^2 - aX - 5}$$

$$\frac{X^2 - 5X}{+}$$

$$\frac{(5-a)X - 5}{}$$

$$q(5) = 5^2 - 5a - 5 = 0$$

$$25 - 5 = 5a$$

$$5a = 20$$

$$a = 4 \text{ Ans.}$$

5. ab^2 तथा a^2b

$$\text{Ans. माना कि } p(X) = ab^2$$

$$q(X) = a^2b$$

यहां $P(X) = q(X)$ की अधिकतम घाते a^2b^2 है अतः

$$\text{ल.स.} = a^2b^2$$

6. $2X^2 - 8$ तथा $X^2 - 5X + 6$

$$\text{Ans. } P(X) = 2X^2 - 8$$

$$= 2(X^2 - 4)$$

$$= (X+2)(X-2)$$

$$q(X) = X^2 - 5X + 6$$

$$= (X-3)(X-2)$$

$P(X)$ व $q(X)$ की अभाज्य गुणनखण्ड की अधिकतम घाते

$$2(X+2)(X-2)(X-3) \text{ है ।}$$

$$\text{अतः ल. स.} = 2(X-4)(X-3)$$

7. $X^2 - 1$, $(X^2 + 1)$, $(X + 1)$, $(X^2 + X - 1)$

$$\text{Ans. } P(X) = X^2 - 1$$

$$P(X) = (X+1)(X-1)$$

$$q(X) = (X^2+1)(X+1)$$

$$r(X) = (X^2+X-1)$$

यहां पर $P(X)$, $q(X)$ तथा $r(X)$ में विभिन्न प्रकार के अभाज्य गुणनखण्डों की अधिकतम घाते $(X+1)(X-1)(X^2+1)$ तथा (X^2+X-1) हैं।

$$\begin{aligned} \text{अतः ल. स.} &= (X+1)(X-1)(X^2+1)(X^2+X-1) \\ &= (X^2-1)(X^2+1)(X^2+X-1) \\ &= (X^4-1)(X^2+X-1) \end{aligned}$$

प्र. 8. $P(X) = (X-1)^2$ तथा $q(X) = (X+1)(X-1)$ हो तो इनका म.स. (C.F.) तथा ल. स. (L.C.M.) ज्ञात कीजिए। जांच भी कीजिए कि $P(X)$ तथा $q(X)$ का गुणनफल तथा इनके म.स. व ल.स.का गुणनफल बराबर है।

$$\begin{aligned} \text{Ans. } P(X) &= (X-1)^2 \\ &= (X-1)(X-1) \\ q(X) &= (X+1)(X-1) \\ \text{म.स.} &= (X-1) \text{ तथा ल.स. } (X-1)^2(X+1) \text{ होगा।} \\ P(X) \times q(X) &= (X-1)(X-1)(X+1)(X-1) \\ &= (X^2-1)(X^2-2X+1) \text{ (i)} \\ \text{तथा म.स. } \times \text{ ल.स.} &= (X-1)(X-1)^2(X+1) \\ &= (X^2-1)(X^2-2X+1) \text{ (iii)} \end{aligned}$$

समी. (i) व (ii) से विदित है कि $(pX) \times q(X) = \text{HCF} \times \text{LCM}$ Rs.

Lesson - 8

द्विघात समीकरण

1. $2X^2 - 18 = 0$

Ans. $2X^2 - 18 = 0$

$$X^2 = \frac{18}{2} \quad X^2 = 9$$

$X^2 = 9$ (दोनों पक्षों के वर्गमूल लेने पर)

$$X = \pm 3$$

दी गई समीकरण का हल है $(X \pm 3)$

2. $X^2 - 36 = 0$

$$X^2 - 36 = 0$$

$$X^2 = 36$$

$X = \sqrt{36}$ (दोनों पक्षों के वर्गमूल लेने पर)

$$X = \pm 6$$

3. $(2X^2 + 3) - 4 = 0$

$$(X+3) - 4 = 0$$

$$(2X+3)^2 = 4$$

$$(2X+3) = \pm \sqrt{4}$$

$$(2X+3) \pm 2$$

$$2X = -3 \pm 2$$

$$2X = -3 + 2 = -1 \text{ या } -3 - 2 = -5$$

$$X = -\frac{1}{2} \text{ या } = -\frac{5}{2}$$

दी गई समी. के हल है $X = -\frac{1}{2}$ या $-\frac{5}{2}$

4. $\frac{X}{q} = \frac{q}{X}$

$$X = q^2 \text{ (तिर्यक गुणन से)}$$

$$X = \pm \sqrt{q^2} \text{ (दोनों पक्षों का वर्गमूल लेने पर)}$$

$$X = \pm q \text{ Rs.}$$

5. $\frac{9}{X^2-27} = \frac{25}{X^2-11}$

Ans. $\frac{9}{X^2-27} = \frac{25}{X^2-11}$

$$9(X^2-11) = 25(X^2-27)$$

$$9X^2 - 99 = 25X^2 - 675$$

$$-2X^2+9X^2 = -675+99$$

$$-16X^2 = -576$$

$$X^2 = \frac{-576}{-16} = 36$$

$$X = \pm\sqrt{36} \text{ (दोनो पक्षो का वर्गमूल लेने पर)}$$

$$X = \pm 6$$

6. $25X^2-10X-8=0$

दी गई समीकरण है

$$25X^2-10X-8 = 0$$

$$25X^2-20X+10X-8 = 0$$

$$5X(5X-4) + 2(5X-4) = 0$$

$$(5X-4)(5X+2) = 0$$

$$\text{या तो } 5X-4 = 0 \text{ या } (5X+2) = 0$$

$$\text{अतः } X = \frac{4}{5} \text{ या } X = -\frac{2}{5}$$

$$X = \frac{4}{5} \text{ या } X = -\frac{2}{5} \text{ Rs.}$$

7. $20X^2-X-12 = 0$

दी गई समी. है :-

$$20X^2-X-12 = 0$$

$$20X^2-16X+15X-12=0$$

$$4X(5X-4) + 3(5X-4) = 0$$

$$(5X-4)(4X+3) = 0$$

$$\text{या तो } 5X-4 = 0 \text{ या } 4X+3 = 0$$

$$\text{अतः } X = \frac{4}{5} \text{ या } -\frac{3}{4}$$

8. $\frac{10X-1}{X} = 3$

दी गई समी. है :-

$$\frac{10X-1}{X} = 3$$

$$\frac{10X^2-1}{X} = \frac{3}{1}$$

$$10X^2-1 = 3X \text{ (तिर्यक गुणन करने पर)}$$

$$10X^2-3X-1 = 0$$

$$10X^2-5X+2X-5 = 0$$

$$5X(2X-1) + 1(2X-1) = 0$$

$$\text{या तो } 2X-1 = 0 \text{ या } 5X+1 = 0$$

$$\text{अतः } 2X-1 = 0 \text{ या } 5X+1 = 0$$

$$\text{अतः } X = \frac{1}{2} \text{ या } X = -\frac{1}{5}$$

9. $\frac{X+3}{X+2} = \frac{3X-7}{2X-3}$

दी गई समीकरण

$$(3X-7)(X+2) = (X+3)(2X-3)$$

$$3X^2+6X-7X-14 = 2X^2+6X-3X-9$$

$$= X^2-4X-5 = 0$$

$$= X^2-5X+X-5 = 0$$

$$= X(X-5) + 1(X-5) = 0$$

$$\text{या } X+1 = 0 = X-1$$

$$\text{तथा } X-5 = 0 \quad X = 5$$

10. $\frac{X}{a} + \frac{aX}{X} = \frac{b}{a} + \frac{a}{b}$

$$\text{दी गई समीकरण} = \frac{X}{a} + \frac{aX}{X} = \frac{b}{a} + \frac{a}{b}$$

या $\frac{X^2+a^2}{aX} = \frac{b^2+a^2}{ab}$

$aX(b^2+a^2) = ab(X^2+a^2)$

$aXb^2 + a^3X = abX^2 + a^3b$

$abX^2 - aXb^2 - a^3X + a^3b = 0$

$abX(X-b) - a^3(X-b) = 0$

$(abX - a^3)(X-b) = 0$

या $X-b = 0$ $X = b$

तथा $abX - a^3 = 0$ $X = \frac{a^2}{b}$

11. $X^2 - 2(3a+4b)X + 48ab = 0$

दी गई समीकरण है :-

$X^2 - 2(3a+4b)X + 48ab = 0$

$X^2 - 6aX - 8bX + 48ab = 0$

$X(X-6a) - 8b(X-6a) = 0$

$(X-6a)(X-8b) = 0$

या तो $X-6a = 0$ या $X-8b = 0$

$X = 6a$ या $X = 8b$ Rs.

11. $8X^2 = 3X + 5$

दी गई समी. है:-

$8X^2 = 3X + 5$

$X^2 = \frac{3}{8}X + \frac{5}{8}$

$X^2 - \frac{3}{8}X = \frac{5}{8}$ (वाम पक्ष में केवल X के पद रखने पर)

(दोनों पक्षों में X के गुणांक $\frac{3}{4}$ के आधे $\frac{3}{8}$ का वर्ग $\frac{9}{64}$ जोड़ने पर)

$X^2 - 3X + \frac{9}{8} = \frac{5}{8} + \frac{9}{64}$

$(X - \frac{3}{8})^2 = \frac{40+9}{64}$

$X - \frac{3}{8} = \pm \frac{7}{8}$

या $X - \frac{3}{8} = \pm \frac{7}{8}$ या $X = \frac{3}{8} + \frac{7}{8} = \frac{5}{4}$

या $X = \frac{3}{8} - \frac{7}{8} = -\frac{1}{2}$

या तो $X = \frac{5}{8} + \frac{1}{8} = \frac{6}{8}$ या $X = \frac{5}{8} - \frac{1}{8} = \frac{4}{8}$

अतः $X = \frac{3}{4}$ तथा $X = \frac{1}{2}$

12. $X + \frac{1}{X} = \frac{5}{2}$

दी गई समी. है $X + \frac{1}{X} = \frac{5}{2}$

$X^2 + 1 = \frac{5}{2}X$

अतः $X^2 - \frac{5}{2}X = -1$

या $2X^2 - 5X + 2 = 0$

या $2X^2 - 4X - X + 2 = 0$

या $2X(X-2) - 1(X-2) = 0$ या $(X-2)(2X-1) = 0$

अतः $X-2=0$ तब $X=2$ तथा $2X-1=0$ अतः $X=\frac{1}{2}$

13. $X^2 + 50X = 102 - 15X - X^2$

दी गई समीकरण है :-

$X^2 + 50X = 102 - 15X - X^2$

$2X^2 + 65X = 102$ (वाम पक्ष में केवल X के पद रखने पर)

$$X^2 + \frac{65}{2}X = 51$$

$$X^2 + \frac{65}{2}X + \frac{4225}{16} = 51 + \frac{4225}{16} \quad (\text{दोनों पक्षों में } X \text{ के गुणांक } \frac{65}{2} \text{ के आधे } \frac{65}{4} \text{ का वर्ग जोड़ने पर)}$$

$$(X + \frac{65}{2})^2 = \frac{5041}{16}$$

$$X + \frac{65}{2} = \pm \frac{71}{4} \quad (\text{दोनों पक्षों का वर्गमूल लेने पर})$$

$$X = -\frac{65}{4} \pm \frac{71}{4}$$

$$\text{या तो } X = -\frac{65}{4} + \frac{71}{4} \text{ या } X = -\frac{65}{4} - \frac{71}{4}$$

$$X = -34 \text{ तथा } X = +\frac{3}{2}$$

14. $5X^2 - 17X + 6 = 0$ समीकरण की श्री धर आचार्य की विधि से हल किजिए :-
 Ans. दी गई समी. की मानक द्विघात समीकरण

$aX^2 + bX + c = 0$ से तुलना करने पर

$$a = 5, b = -17, c = 6$$

मानक सूत्र $X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ में मान रखने पर

$$X = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \times 5 \times 6}}{2 \times 5}$$

$$X = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 120}}{10} = \frac{17 \pm \sqrt{169}}{10}$$

$$X = \frac{17 \pm 13}{10}$$

$$\text{समी. के मूल } X = \frac{17 + 13}{10} \text{ या } X = \frac{17 - 13}{10}$$

$$X = 3 \text{ या } X = \frac{2}{5} \text{ Rs.}$$

15. $X^2 + 1 = 3X$

Ans. दिए गए समी. को मानक रूप में लिखने पर

$$X^2 - 3X + 1 = 0$$

समी. को मानक द्विघात समी. $aX^2 + bX + c = 0$ से

तुलना करने पर $a = 1, b = -3, c = 1$

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$X = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1}$$

$$X = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2}$$

$$X = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

दिये गये समीकरण के मूल $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ तथा $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ हैं

16. $X^2 - 5X - 7 = 0$

यहां $a = 1, b = 5, c = -7$

अतः मानक सूत्र से $X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$X = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times (-7)}}{2 \times 1}$$

$$X = \frac{5 \pm \sqrt{25+28}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{53}}{2} \text{ है।}$$

दी गई समी. के मूल. $\frac{5+\sqrt{53}}{2}$ तथा $\frac{5-\sqrt{53}}{2}$ है।

मूलों की प्रकृति

यदि $b^2-4ac > 0$ मूल वास्तविक
 $b^2-4ac = 0$ मूल समान
 $b^2-4ac < 0$ मूल काल्पनिक
 $b^2-4ac > 0$ व पूर्ण वर्ग हो तो मूल परिमेय व वास्तविक

17. $3X^2-6X+5 = 0$

Ans. यहाँ $a = 3, b = -6, C=5$

विविक्त कर $D = b^2-4ac$
 $= 6^2-4 \times 3 \times 5$
 $= 36-60 = -24 < 0$

विविक्तकर का मान ऋणात्मक है अतः वास्तविक मूल नहीं है।

18. $6X^2-7X+2 = 0$

Ans. यहाँ $a=6, b=-7, c=2$

विविक्तकर $D = b^2-4ac$
 $= (-7)^2-4 \times 6 \times 2$
 $= 49-48 = 1$

विविक्तकर पूर्ण वर्ग है अतः समीकरण के मूल वास्तविक पृथक पृथक व परिमेय होगी।

19. दो अंको की संख्या ऐसी है कि इसके अंको का गुणनफल 18 है। यदि इस संख्या में से 63 घटा दिये जाये तो संख्या के अंक अपना स्थान परस्पर बदल लेते है। संख्या ज्ञात कीजिए।

Ans. माना इकाई का अंक $= X$ जब क्रम बदलता हो तो इकाई का अंक $\frac{18}{X}$
 अतः दहाई का अंक $= \frac{18}{X}$ व दहाई $= X$

प्रथम संख्या $= 10X(\frac{18}{X})+X$

व द्वितीय सं. $= 10X+\frac{18}{X}$

प्रश्नानुसार $10 \frac{18}{X} + X - 10X - \frac{18}{X} = 63$

$$\frac{180-9X^2-18}{X} = \frac{63X}{X}$$

$$9X^2+63X-162 = 0$$

$$X^2+7X-18 = 0$$

$$X^2+9X-2X-18 = 0$$

$$X(X+9) - 2(X+a) = 0$$

$$(X+a)(X-2) = 0$$

या तो $X+a = 0$ $X = -9$ (जिसे कर देंगे)

या $X-2 = 0$ $X = 2$

अतः इकाई अंक $= 2$ तथा दहाई का अंक $= \frac{18}{2} = 9$

अतः अभिष्ट सं. $= 92$

20. उन दो क्रमागत सम पूर्णाकों को ज्ञात कीजिए, जिनके वर्गों का योग 164 हो।

Ans. माना कि प्रथम सम पूर्णांक $= X$

अतः द्वितीय सम पूर्णांक $= X+2$

प्रश्नानुसार $X^2+(X+2)^2 = 164$

$$X^2+X^2+4X-164 = 0$$

$$2X^2+4X-160 = 0$$

$$X^2+2X-80 = 0$$

$$X^2+10X-8X-80 = 0$$

$$X(X+10)-8(X+10) = 0$$

$$(X+10)(X-8) = 0$$

या तो $X+10 = 0$ या $(X-8) = 0$

$X = -10$ ऋणात्मक होने से इसे निरस्त कर देंगे ।

अतः प्रथम सम पूर्णांक = 8 तथा द्वितीय सम पूर्णांक = $8+2 = 10$ Rs.

21. एक व्यक्ति 360 रु. लेकर कुछ दिनों के प्रवास पर जाता है । यदि वह प्रवास 4 दिन और बढ़ा देता है तो प्रतिदिन के व्यय में 3 रु. की कटौती करनी पड़ती है । इसके मूल प्रवास के दिनों की संख्या ज्ञात कीजिए ?

Ans. मूल प्रवास के दिनों की संख्या = X

प्रतिदिन व्यय = $\frac{360}{X}$ रु.

प्रवास में 4 दिन बढ़ाने पर $(X+4)$ दिन तथा प्रतिदिन व्यय = $\frac{360}{X} - 3$

अतः $(X+4) \left(\frac{360}{X} - 3 \right) = 360$

$(X+4) (360-3X) = 360X$

$+ 360X - 3X^2 + 1440 - 12X - 360X = 0$

$X^2 + 4X - 480 = 0$

$X^2 + 24X - 20X - 480 = 0$

$X(X+24) - 20(X+24) = 0$

$(X+24)(X-20) = 0$

या तो $X+24 = 0$ $X = -24$ जो कि अग्रहणीय है

या $X-20 = 0$ $X = 20$ दिन Rs.

22. एक हवाई जहाज अपनी 1200 कि.मी. की यात्रा पूरी करने में 1 घंटा कम लेता है । यदि उसकी सामान्य चाल में 100Km/hour की वृद्धि कर दी जाए । हवाई जहाज की सामान्य चाल ज्ञात करो ?

Ans. माना हवाई जहाज की सामान्य चाल = X Km/घंटा

100 Km/hour की वृद्धि के बाद जहाज की चाल = $(X+100)$ Km/hour

1200 Km. की दूरी सामान्य चाल से तय करने में लगा समय = $\frac{1200}{X}$ घण्टा

1200 Km. की दूरी चाल में वृद्धि के बाद तय करने में लगा समय = $\frac{1200}{100+X}$ घण्टा

अतः प्रश्नानुसार $\frac{1200}{X} - \frac{1200}{X+100} = 1$

$$\frac{1200(X+100) - 1200(X)}{X(X+100)} = 1$$

$1200X - 1200X + 120000 = X^2 + 100X$

$X^2 + 100X - 120000 = 0$

$X^2 + 400X - 300X - 120000 = 0$

$X(X+400) - 300(X+400) = 0$

$(X+400)(X-300) = 0$

या तो $X+400 = 0$ $X = -400$ (जिसे निरस्त कर देंगे)

या $X-300 = 0$ $X = 300$ KM/घंटा Ans.

1. शुद्ध द्विघात समीकरण का हल :- इसमें अज्ञात राशि का एक घातीय पद नहीं होता है और इसका स्वरूप $2X^2 - c = 0$ जैसा होता है । अतः

$$X = \pm \frac{c}{a}$$

2. इस प्रकार एक मूल $+\sqrt{\frac{c}{a}}$ और दूसरा मूल $-\sqrt{\frac{c}{a}}$

3. मिश्र द्विघात समीकरण का हल (A) प्रथम विधि :- इसमें त्रिपक्षीय व्यंजकों की भांति गुणनखण्ड कर लिये जाते हैं, जैसे :- $X^2 - 5X + 6 = 0$

या $(X-2)(X-3) = 0$

अतः $X = 2$ व $X = 3$ समी. के हल होंगे । इन्हे समी. का मूल (roots) कहते हैं । प्रत्येक द्विघात समी. के हमेशा दो मूल होते हैं ।

- (B) द्विघात विधि :- $aX^2 + bX + c = 0$ के रूप में किसी भी समी. के मूल अग्रलिखित सूत्र द्वारा ज्ञात किये जा सकते हैं यदि

$$aX+bX+c = 0$$

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{(-b)^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{श्री धराचार्य सूत्र नाम से जानते हैं}$$

4. यदि दो मूल दिये हुए हों तो उनकी संगत द्विघात समीकरण
 $X^2 - (\text{मूलों का समीकरण}) X + (\text{मूलों का गुणनफल}) = 0$

Lesson - 9

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप

Lesson से संबंधित सूत्र तथा महत्वपूर्ण प्रश्न व (Example) समान्तर माध्य (Arithmetic mean)

- (i) जब प्रारम्भिक आंकड़े अथवा व्यक्तिगत श्रेणी दी गई हो तो समान्तर माध्य $(\bar{X}) = \frac{\text{राशियों का योग}}{\text{राशियों की संख्या}}$

$$\text{या } (\bar{X}) = \frac{\sum X}{n}$$

जहाँ X राशियों का योग तथा N राशियों की सं. तथा X समान्तर माध्य (A.M.) को व्यक्त करता है ।

Ex-1 प्रथम दस विषम संख्याओं का समान्तर माध्य ज्ञात करना

हल प्रथम दस विषम सं. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19

$$\text{राशियों का योग } x = 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19 = 100$$

$$\text{राशियों की सं. } N = 10$$

$$\text{स. मा. } \bar{X} = \frac{X}{N} = \frac{100}{10} = 10 \text{ Rs.}$$

Ex-2 आठ क्रमागत विषम संख्याओं का औसत 16 है, तो संख्या ज्ञात कीजिए ।

हल सम अथवा विषम क्रमागत संख्याओं में अंतर 2 का होता है ।

$$\text{मान वह सं. } X, X+2, X+4, X+6, X+8, X+10, X+12, X+14$$

$$\text{अतः इसका योग } X = X+X+2+X+4+X+6+X+8+X+10+X+12+X+14$$

$$= 8X+54 = 8(X+7) = 16$$

$$\text{दिया है } N=8, \quad \bar{X}$$

$$\text{अतः स. मा. } = \bar{X} = \frac{X}{N}$$

$$16 = \frac{8(X+7)}{8}$$

$$X+7 = 16 \quad X = 16-7 = 9$$

अभिष्ट सं. 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23 Ans.

1. यदि एक कक्षा में गणित विषय में दस छात्रों के प्राप्तांक 52, 75, 40, 70, 43, 40, 65, 35, 48, 52 हो तो समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए ।

$$(\bar{X}) = \frac{X}{n}$$

$$= \frac{52+75+40+70+43+40+65+35+48+52}{10}$$

$$(\bar{X}) = \frac{520}{10}$$

$$(\bar{X}) = 52 \text{ अंक Ans.}$$

2. यदि 3, 4, 8, 5, X, 3, 2, 1 अंकों का समान्तर माध्य 4 हो तो X का मान ज्ञात कीजिए ?

Ans. $\bar{X} = \frac{X}{n}$

$$\text{या } = \frac{3+4+8+5+X+3+2+1}{10}$$

$$\text{या } 32 = 26+X$$

$$X = 32-26 = 6 \text{ Ans.}$$

3. एक विद्यालय के पुस्तकालय से 10 दिन में छात्रों को दी गई पुस्तकों की संख्या निम्नलिखित है :-

300 405 455 489 375

280 418 502 300 476
 प्रतिदिन दी गई पुस्तकों की औसत संख्या ज्ञात कीजिए ।

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{X}{n} \\ &= \frac{300+405+455+439+375+280+418+502+300+476}{10} \\ &= \frac{4000}{10} \quad (\bar{X}) = 400\end{aligned}$$

4. एक कक्षा के Section A के 25 छात्रों का औसत भार 51 किग्रा है । जबकि सेक्शन B के 35 छात्रों का औसत भार 54 किग्रा है । इस कक्षा के कुल 60 छात्रों का औसत ज्ञात कीजिए ?

Ans. माना कि $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{25}$ वे 25 छात्र हैं, जिनका औसत भार 51 किग्रा है ।
 $\bar{X} = \frac{1}{n} (X)$

$$\begin{aligned}5) &= \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{25}}{25} \\ \frac{X}{25} &= 51 \quad X = 51 \times 25 = 1275\end{aligned}$$

अब माना कि $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_{35}$ वे 35 छात्र हैं, जिनका औसत भार 54 Kg है ।
 $\bar{y} = \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned}\text{अतः } 54 &= \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_{35}}{35} \\ y &= 35 \times 54 = 1890\end{aligned}$$

अतः 60 छात्रों का औसत भार = $\frac{25 \text{ छात्रों का भार} + 35 \text{ छात्रों का भार}}{60}$

$$\frac{X + Y}{60}$$

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{1275 + 1890}{60} \\ \bar{X} &= 52.75\end{aligned}$$

अतः 60 छात्रों के भार का औसत 52.75 किग्रा है ।

5. 13 संख्याओं का माध्य 24 है । यदि प्रत्येक संख्या में 3 जोड़ दिया जाये, तो नये माध्य में क्या परिवर्तन आयेगा ?
 6. निम्न बारम्बारता बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए ?

X	3	5	8	11
F	2	4	5	3

Ans.

X	F	FX
3	2	$3 \times 2 = 6$
5	4	$5 \times 4 = 20$
8	5	$8 \times 5 = 40$
11	3	$11 \times 3 = 33$
	F = 14	FX = 99

$$\bar{X} = \frac{FX}{f} = \frac{99}{14} = 7.07 \text{ Ans.}$$

7.

X	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
F	30	60	20	40	10	50

8.

भार किरा में	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
छात्रों की संख्या	10	25	28	12	10	15

9. यदि निम्न बारम्बारता बंटन का माध्य 1.46 हो तो अज्ञात बारम्बारता ज्ञात कीजिए ।

X	0	1	2	3	4	5	योग
F	46			25	10	5	200

Ans.

X	F	FX
0	46	0
1	L_1	L_1
2	L_2	$2L_2$
3	25	75
4	10	40
5	5	25
	$F=86+L_1+L_2$	$FX = 140+L_1+2L_2$

दिया है $F = 200$

$$\text{या } 86+L_1+L_2=200$$

$$\text{या } L_1+L_2=114 \text{-----(1)}$$

$$\text{व स. मा. } \bar{X} = 1.46$$

$$\frac{FX}{F} = 1.46$$

$$\frac{140+L_1+2L_2}{200} = 1.46$$

$$140+L_1+2L_2 = 292$$

$$L_1+2L_2 = 152 \text{-----(2)}$$

$$(2)-(1)$$

L_2 का मान (1) में

$$L_1 = 76 \text{ Rs.}$$

10. निम्न बारम्बारता बंटन का माध्य, कल्पित माध्य की सहायता से ज्ञात कीजिए :-

X	800	820	860	900	920	980	1000
F	7	14	19	25	20	10	5

Ans. यहां कल्पित माध्य $a = 900$ है ।

X	f	$d = (X-a)$	$fxd =$
800	7	-100	-700
820	14	-80	-1120
860	19	-40	-760
900	25	00	000
920	20	20	400
980	10	80	800
1000	5	100	500
	$F = 100$		$fd = -880$

$$\bar{X} = a + \frac{fd}{F} = 900 + \frac{-880}{100}$$

$$= 900 - 8.8$$

$$\bar{X} = 891.2 \text{ Ans}$$

11.

खर्च (रूपयो में)	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350	350-400	400-450	450-500
मजदूरों की संख्या	24	40	33	28	30	22	16	7

Ans. माना कल्पित माध्य $A = 325$ है ।

खर्च (रूपयों में)	f	माध्य (X)	d = (X-a)	fd
100-150	24	125	-200	-4800
150-200	40	175	-150	-6000
200-250	33	225	-100	-3300
250-300	28	275	-50	-1400
300-350	30	325	00	000
350-400	22	375	50	1100
400-450	16	425	100	1600
450-500	7	475	150	1050
	F = 100			-11750

$$\begin{aligned} \text{स. माध्य } \bar{X} &= a + \frac{fd}{F} \\ &= 325 - \frac{117500}{100} \\ &= 325 - 1175 \\ &= -850 \end{aligned}$$

$$\text{स. माध्य} = 266.25 \text{ Ans}$$

12. एक छात्र ने अंग्रेजी में 46% गणित में 67%, हिन्दी में 53%, इतिहास में 72% तथा अर्थशास्त्र में 58% अंक प्राप्त किए । अन्य विषयों की तुलना में अंग्रेजी को 3 गुना तथा गणित को 2 गुना भार मान्य हो तो छात्र के प्राप्तांकों का भारित माध्य ज्ञात कीजिए ?

Ans. यहां दिया गया है –

$$X_1 = 46, X_2 = 67, X_3 = 53, X_4 = 72, X_5 = 58$$

माना हिन्दी का भार = X

इतिहास का भार = X

अर्थशास्त्र का भार भी = X है ।

तो गणित का भार = 2X होगा ।

तथा अंग्रेजी का भार = 3X होगा ।

अतः यहां $w_1 = 3X, w_2 = 2X, w_3 = X, w_4 = X, w_5 = X$ है ।

तब भारित समान्तर भारित माध्य

$$\bar{X}_w = \frac{\sum Xw}{\sum w}$$

$$\bar{X}_w = \frac{w_1 X_1 + w_2 X_2 + w_3 X_3 + w_4 X_4 + w_5 X_5}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5}$$

$$\bar{X}_w = \frac{46(3X) + 67(2X) + 53X + 72X + 58X}{3X + 2X + X + X + X}$$

$$\bar{X}_w = \frac{138X + 134X + 53X + 72X + 58X}{8X}$$

$$\bar{X}_w = \frac{455X}{8X} \quad \bar{X}_w = \frac{455}{8} = 56.875 \text{ अंक}$$

- Q13. एक कक्षा में 45 छात्र हैं जिनमें 15 लड़कियां हैं । लड़कियों का औसत भार 45 किग्रा तथा लड़कों का औसत भार 52 किग्रा है । कक्षा के विद्यार्थी का औसत भार ज्ञात कीजिए ?

Ans. माना 15 लड़कियों का औसत भार = 45 किग्रा

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n} \text{ में रखने पर}$$

$$45 = \frac{X}{15}$$

$$X = 45 \times 15 = 675$$

लड़कों का कुल भार $X = 675 \text{ Kg}$

30 लडकों का औसत भार = 52 Kg

अतः $\bar{Y} = \frac{y}{n}$ में रखने पर

$$52 = \frac{y}{30}$$

$$y = 52 \times 30 = 1560$$

45 छात्रों का कुल भार = X + Y 1675 + 1560 = 2235

1 छात्र का भार $2235/45 = 49.76$ Kg Ans.

14. एक सौ परिवारों में बच्चों की संख्या निम्न प्रकार है। इनकी माध्यिका ज्ञात कीजिए ?

बच्चों की संख्या	0	1	2	3	4	5	6
परिवारों की संख्या	10	35	27	17	6	3	2

Ans.

X	F	C.F.
0	10	10
1	35	45
2	27	72
3	17	89
4	6	95
5	3	98
6	2	100
	fX = 100	

यहां $N = f = 100$ तब $\frac{N}{2} = \frac{100}{2} = 50$

50 से ठीक बड़ी C.F. है = 72

जिसके संगत चर का मान 2 है।

अतः माध्यिका $M=2$ बच्चे

15. 100 छात्रों के प्राप्तांक निम्न सारणी में दिये गये हैं। इनसे माध्यिका ज्ञात कीजिए ?

Ans.

प्राप्तांक	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
छात्रों की सं.	6	20	44	26	3	1

संचयी बारम्बारता सारणी

वर्ग	F_1	(संचयी बारम्बारता) (c.f)
20-30	6	6
30-40	20	26
40-50	44	70
50-60	26	96
60-70	3	99
70-80	1	100

$N = 100$

यहां $\frac{N}{2} = \frac{100}{2} = 50$ माध्यिका वर्ग अन्तराल "40-50" तथा यहां संगत $L = 40$, $C=26$, $H = 10$ व $F = 44$

$$\text{माध्यिका (M)} = L + \frac{\frac{N}{2} - C}{F} \times h$$

$$\text{माध्यिका (M)} = 40 + \frac{50-26}{44} \times 10$$

Continue

$$= 40 + \frac{24}{44} \times 10$$

$$M = 40 + 5.45 = 45.45 \text{ Ans.}$$

16.

वर्ग	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
बारम्बारता	3	7	16	12	9	5

Ans. वर्ग अन्तराल (20-25) की बारम्बारता 16 सर्वाधिक है। अतः बहुलक वर्ग (20-25) है।

$$\text{अतः } L = 20, f_1 = 16, f_0 = 7, f_2 = 12, h = 5$$

$$\text{सूत्र} = L + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times h$$

$$20 + \frac{16 - 7}{2 \times 16 - 7 - 12} \times 5$$

$$\text{बहुलक} = 20 + \frac{9}{13} \times 5 = 23.46 \text{ लगभग}$$

Lesson - 10

माध्य-विचलन

माध्य विचलन, = माध्य $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

माध्य विचलन = $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})$, X_i यहां $(X_i - \bar{X})$, X_i का \bar{X} से विचलन का निरपेक्ष मान है।

\bar{X} के स्थान पर किसी मूल बिंदु a से विचलन लेने पर माध्य विचलन को मूल बिन्दु a से लिया गया माध्य विचलन कहते हैं। मूल बिन्दु a से लिये गये माध्य विचलन को $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - a)$ से व्यक्त करते हैं।

माध्यिका से लिये गये माध्य विचलन को $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - M)$ से व्यक्त करते

माध्यिका M से लिया गया माध्य विचलन $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - M)$ प्रत्येक माध्य विचलन से न्यूनतम होता है।

यदि आंकड़े बारम्बारता सारणी से हों तो माध्य विचलन

$$(1) \text{ समान्तर माध्य से माध्य विचलन} = \frac{\sum f(X - \bar{X})}{\sum f}$$

$$(2) \text{ मूल बिन्दु } A \text{ से माध्य विचलन} = \frac{\sum f(X - A)}{\sum f}$$

$$(3) \text{ माध्यिका } M \text{ से माध्य विचलन} = \frac{\sum f(X - M)}{\sum f}$$

Q.1 यदि एक कक्षा के 10 छात्रों के सांख्यिकी विषय में प्राप्तांक निम्न प्रकार हों तो माध्य विचलन ज्ञात कीजिए ?
52, 75, 40, 43, 40, 65, 35, 48, 52

$$\text{Ans. समान्तर माध्य } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum EX$$

$$= \frac{52 + 75 + 40 + 70 + 43 + 40 + 65 + 35 + 48 + 52}{10}$$

$$\bar{X} = \frac{520}{10} = 52$$

प्राप्तांक X_i	$(X_i - \bar{X})$	$X_i - X$
52	0	0
75	23	23
40	-12	12
70	18	18
43	-9	9
40	-12	12
65	13	13
35	-17	17
48	-4	4
52	0	0
$\Sigma X = 520$	$(X_i - \bar{X}) = 0$	$\Sigma X_i - \bar{X} = 108$

$$\text{माध्य विचलन} = \frac{\Sigma |X_i - \bar{X}|}{n} = \frac{108}{10} = 10.8 \text{ Ans.}$$

- Q.2 क्रिकेट की एक टीम में अपनी पहली पारी में क्रमशः 45, 60, 15, 210, 3, 0, 0, 47, 15, 35, 10 रन बनाए । ज्ञात कीजिए ?
 (i) माध्य विचलन (ii) मूल बिन्दु 20 से माध्य विचलन (iii) माध्यिका से लिया गया माध्य विचलन

Ans.

स X_1	$ X_i - \bar{X} $	$ X_i - M $	$ X_i - 20 $
0	40	15	0
0	40	15	0
3	37	12	17
10	30	5	10
15	25	0	05
15	25	0	05
35	5	20	15
45	5	30	25
47	7	32	27
60	20	45	40
100	170	192	190
योग $\Sigma X_1 = 440$	$(\Sigma X_i - \bar{X}) = 404$	$\Sigma X_i - M = 369$	$\Sigma X_i - 20 = 334$

$$\text{यहां } \bar{X} = \frac{440}{11} = 40$$

$$\text{तथा } M = 15$$

$$(i) \text{ माध्य विचलन } (S\bar{X}) = \frac{\Sigma |X_i - \bar{X}|}{n} = \frac{404}{11} = 36.73$$

$$(ii) \text{ माध्यिका से माध्य विचलन } (S_m) = \frac{\Sigma |X_i - M|}{n} = \frac{369}{11} = 33.55$$

$$(iii) \text{ मूल बिन्दु 20 से माध्य विचलन } (S_{20}) = \frac{\Sigma |X_i - 20|}{n} = \frac{334}{11} = 30.36 \text{ Ans.}$$

- Q. 3 एक कक्षा के 11 छात्रों के गणित विषय के प्राप्तांक इस प्रकार है :-

78, 11, 99, 63, 94, 6, 78, 36, 30, 55, 22

माध्य विचलन ज्ञात कीजिए ?

Ans. समान्तर माध्य $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X$

$$\bar{X} = \frac{78+11+99+63+94+06+78+36+30+55+22}{11}$$

$$\bar{X} = \frac{572}{11} = 52$$

Q.

प्राप्तांक	$(X_i - \bar{X})$	$X_i - \bar{X}$
78	$78-52 = 26$	26
11	$11-52 = -41$	41
99	$99-52 = 47$	47
63	$63-52 = 11$	11
94	$94-52 = 42$	42
06	$06-52 = -46$	46
78	$78-52 = 26$	26
36	$36-52 = -16$	16
30	$30-52 = -22$	22
55	$55-52 = 3$	3
22	$22-52 = 30$	30
योग = 572	$(\sum X_i - \bar{X}) = 0$	$\sum X_i - \bar{X} = 310$

माध्य विचलन (\bar{X}) = $\frac{\sum |X_i - \bar{X}|}{n} = \frac{310}{11} = 28.18$ Ans.

Q.4 एक कक्षा में 9 विद्यार्थियों का भार (Kg में) निम्न है ।
49, 60, 47, 50, 47, 59, 58, 45, 53

माध्य विचलन और माध्यिका से लिया गया माध्य विचलन ज्ञात कीजिए ।

Ans.

वजन (Kg. में)	$(X_i - \bar{X})$	$ X_i - \bar{X} $	$ X_i - M $
49	$49-52 = -3$	3	1
60	$60-52 = 8$	8	10
47	$47-52 = -5$	5	3
50	$50-52 = -2$	2	0
47	$47-52 = -5$	5	3
59	$59-52 = 7$	7	9
58	$58-52 = 6$	6	8
45	$45-52 = -7$	7	5
53	$53-52 = 1$	1	3
$\sum X = 468$	$(\sum X_i - \bar{X}) = 0$	$\sum X_i - \bar{X} = 44$	$\sum X_i - M = 42$

माध्य = $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum X_i = \frac{468}{9} = 52$

माध्यिका ज्ञात करने के लिए श्रेणी को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर विचलन के मान इस प्रकार होंगे ।

अतः माध्यिका = $\frac{9+1}{2} = 5$ वां पद = 50

अतः माध्य विचलन = $\frac{1}{n} \sum |X_i - \bar{X}| = \frac{44}{9} = 4.89$ Ans.

माध्यिका से लिया गया माध्य विचलन = $\frac{1}{n} \sum |X_i - M| = \frac{42}{9} = 4.67$ Ans.

Q.5 निम्न बारम्बारता बंटन का माध्य विचलन ज्ञात कीजिए ?

चरमान	2	4	6	8	10	12
बारम्बारता	1	3	4	12	5	5

हल

X ₁	F ₁	F ₁ X ₁	(X ₁ - \bar{X})	F ₁ /X ₁ - \bar{X} /
2	1	2	6.2	6.2
4	3	12	4.2	12.6
6	4	24	2.2	8.8
8	2	16	.2	.4
10	5	50	1.8	9.0
12	5	60	3.8	19.0
योग	F ₁ =20	F ₁ X ₁ = 164		F ₁ /X ₁ - \bar{X} / = 56

$$\bar{X} = \frac{F_1 X_1}{N} = \frac{164}{20} = 8.2$$

$$\text{माध्य विचलन } S \bar{X} = \frac{F_1 (X_1 - \bar{X})}{N} = \frac{56}{20} = 2.8$$

अतः माध्य विचलन = 2.8 Ans.

Q.6 निम्न बंटन के लिए माध्य, मूल बिंदू 20 तथा माध्यिका से लिया गया माध्य विचलन ज्ञात कीजिए ?

आकार	10	12	14	16	18	20	22	24
बारम्बारता	5	8	22	24	18	15	7	2

Q.7 निम्न सामुहिक बारम्बारता बंटन का माध्यिका तथा मूल बिन्दू 20 से लिया गया माध्य विचलन ज्ञात कीजिए ?

वर्ग	0-8	8-16	16-24	24-32	32-40
बारम्बारता	4	3	5	4	4

Ans. M = 9.36

X ₁	F ₁	मध्यमान X ₁	(X ₁ -M)	F ₁ /X ₁ - \bar{M} /	/X ₁ -20/	/X ₁ -20/
0-8	4	4	5.36	21.44	16	64
8-16	3	12	2.64	7.93	8	24
16-24	5	20	10.64	53.2	0	0
24-32	4	28	18.64	74.56	8	32
32-40	4	36	22.64	106.56	16	64
				263.68		184

$$\begin{aligned} \text{माध्यिका विचलन} &= \frac{1}{n} f_i / X_i - M / \\ &= \frac{263.68}{20} = 13.18 \end{aligned}$$

$$\text{मूल बिन्दू 20 से विचलन} = \frac{1}{n} f_i / X_i - 20 /$$

$$\frac{184}{20} = 9.2$$

Lesson - 9

घन और घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

1. 20 मी. लम्बे, 16 मी. चौड़े और 12 मी. ऊंचे कमरे में अधिक से अधिक कितनी लम्बी छड़ रखी जा सकती है ?

Ans. कमरे की लम्बाई = 20 मी.
चौड़ाई = 16 मी.
ऊँचाई = 12 मी.

कमरे में अधिक लम्बी रखी जाने वाली छड़ कमरे के विकर्ण के बराबर होगी ।

$$\begin{aligned}\text{विकर्ण} &= \sqrt{(\text{ल.})^2 + (\text{चौड़ाई})^2 + (\text{ऊँ.})^2} \\ &= \sqrt{(20)^2 + (16)^2 + (12)^2} \text{ मी.} \\ &= \sqrt{400 + 256 + 144} \text{ मी.} \\ &= \sqrt{800} \text{ मी.} \\ &= 20\sqrt{2} \text{ मी.} \\ &= 20 \times 1.414 \\ &= 28.28 \text{ मी. Ans.}\end{aligned}$$

कमरे से अधिक से अधिक 28.28 मी. लम्बी छड़ रखी जा सकती है ।

2. एक संदुक 1 मी. लम्बा, 80 से.मी. चौड़ा और 60 से.मी. ऊँचा है । इसके पैदे को छोड़कर बाहर की ओर से सभी पृष्ठों पर 30 रु. प्रतिवर्ग की दर से रंग कराने का व्यय ज्ञात कीजिए ?

Ans. संदुक की ल. = 1 मी. = 100 सेमी
चौ. = 80 से.मी.
ऊँ. = 60 से.मी

संदुक के पैदे को छोड़कर संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$\begin{aligned}&= \{100 \times 80 + 2(80 \times 60 + 100 \times 60)\} \text{ वर्ग से.मी.} \\ &= \{8000 + 2(4800 + 6000)\} \text{ वर्ग से. मी.} \\ &= \{8000 + 21600\} \text{ वर्ग से.मी.} \\ &= 29600 \text{ वर्ग से.मी.} = 2.96 \text{ M}^2\end{aligned}$$

रंग कराने की दर = 30 रु. प्रति वर्ग मी.

रंग कराने का व्यय = $2.96 \times 30 = 88.80$ Ans.

3. एक टिन के बक्से की ल. चौ. और ऊँ. क्रमशः 20 M., 12M., और 14 C.M. है । ऐसे 20 बक्से बनाने हैं । इसमें लगने वाले टिन का क्षे. ज्ञात कीजिए । यदि टिन का मूल्य 15 रु. प्रति वर्ग मी. हो तो बक्सों में लगे टिन का मूल्य भी ज्ञात कीजिए ।

Ans. बक्से की ल. = 20 c.m.,
चौ. = 12 c.m.,
ऊँ. = 14 c.m.,

बक्से का स. पृष्ठीय क्षे.

$$\begin{aligned}&= 2(20 \times 12 + 12 \times 14 + 14 \times 20) \text{ वर्ग c.m.,} \\ &= 2(240 + 168 + 280) \text{ वर्ग c.m.,} \\ &= 2 \times 688 \text{ वर्ग c.m.,} \\ &= 1376 \text{ वर्ग c.m.,}\end{aligned}$$

20 बक्सों में लगे टिन का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned}&= 20 \times 1376 \text{ वर्ग c.m.,} \\ &= 27520 \text{ वर्ग c.m.} \\ &= 2.752 \text{ वर्ग मी.}\end{aligned}$$

1 वर्ग मी. टिन का मूल्य = 15 रु.

20 बक्सों में लगे टिन का मू. = $15 \times 2.752 = 41.28$ रु. Ans.

4. एक संदुक की माप 50c.m. x 36c.m. x 25c.m. है । इस संदुक का कवर बनाने में कितने वर्ग c.m. कपड़े की आवश्यकता होगी ।

5. एक घन का प्रत्येक पृष्ठ 100 वर्ग c.m. है । यदि आधार के समान्तर समतल द्वारा घन को काटकर दो बराबर भागों में बांट दिया जाये, तो प्रत्येक समान भाग का सं. पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ?

6. बगैर ढक्कन का एक बंदूक 3 c.m. मोटी लकड़ी का बना हुआ है । उसकी बाहरी ल. 146 c.m. चौ. 116 c.m. और ऊँ. 83 c.m. है । उसके अन्दर की आरे रंग कराने का खर्च ज्ञात कीजिए, जबकि रंग की दर 3 रु. प्रति 1000 वर्ग c.m. हो ।

7. एक ढक्कनदार सन्दुक 146 c.m मोटी लकड़ी से बना है । सन्दुक के अन्दर की ल. चौ. और ऊँ. क्रमशः 1 मी., और 55 से.मी. है । इसके बाहर के संपूर्ण पृष्ठ पर 5 रु. प्रति वर्ग मी. की दर से रंग कराने का खर्चा ज्ञात कीजिए ?

8. एक हौज की ल. 2 मी., चौ. 1.5 मी. और गहराई 2.5 मी. है । इसमें कितने लीटर पानी भरा जा सकता है ?

Continue

(1 ली. = 1000 घन से.मी.)

Ans. हौज की ल. = 2 मी. = 200 से.मी.
चौ. = 1.50 मी. 150 से.मी.
गहराई = 2.5 मी. = 250 से.मी.
हौज का आयतन = $200 \times 150 \times 250$ घन से.मी.
= $\frac{200 \times 150 \times 250}{1000}$ ली.
= 7500 ली. Ans.

अतः हौज में 7500 ली. पानी भरा जा सकता है ।

9. एक बक्सा 1 से.मी. मोटी लकड़ी का बना हुआ है । उसकी बाहरी ल. चौ. व ऊँ क्रमशः 75 से.मी., 50 से.मी. और 32 से.मी. है । बक्से में लगी लकड़ी का आयतन ज्ञात कीजिए ?

Ans. बक्से की ल. = 75 से.मी.
चौ. = 50 से.मी.
ऊँ. = 32 से.मी.
बक्से का बाहरी आयतन = $75 \times 50 \times 32$ घन से.मी.
= 12000 घन से.मी.
लकड़ी की मोटाई = 1 से.मी.
बक्से के अन्दर की ल. = $75 - 2 \times 1 = 73$ से.मी.
= $50 - 2 \times 1 = 48$ से.मी.
= $32 - 2 \times 1 = 30$ से.मी.
बक्से के अन्दर का आयतन = $73 \times 48 \times 30$ घन से.मी.
= 105120 घन से.मी.
बक्से में लगी लकड़ी का आयतन = $120000 - 105120$ घन से.मी.
= 14880 से.मी.

10. 20 मी. लम्बी, 5 मी. ऊंची और 50 से.मी. मोटी दीवार बनाने में 25 से.मी. \times 16 से.मी. \times 10 से.मी. माप की कितनी ईंट लगेगी । जबकि दीवार में एक दरवाजा 2 मी. \times 1.5 मी. और 2 खिड़की 1.5 मी. \times 1 मी. है ? 280 रु. प्रति हजार की दर से ईंटों का मूल्य भी ज्ञात कीजिए ?

Ans. दीवार का आयतन = $20 \times 5 \times 0.5$ घन मीटर
एक दरवाजा और दो खिड़कियों के लिए छोड़े गये खाली स्थान का आयतन =
दरवाजे की ऊँ. \times चौ. \times दीवार की मोटाई + 2 (खिड़की की ऊँ. \times चौ. \times दीवार की मोटाई)
= $\{2 \times 1.5 \times 0.5 + 2(1.5 \times 1 \times 0.5)\}$ घन मी.
= $(1.5 + 1.5)$ घन मी.
= 3.0 घन मी.
दीवार का आयतन जहां ईंट लगेगी = $(50 - 3)$ घन मी. = 47 घन मी.

एक ईंट का आयतन = $\left(\frac{25}{100} \times \frac{16}{100} \times \frac{10}{100}\right)$ घन मी.

ईंटों की संख्या $\frac{\text{दीवार का आयतन}}{\text{ईंट का आयतन}} = 47 \times \frac{100 \times 100 \times 100}{25 \times 16 \times 10}$

= 11750

ईंटों का मूल्य = $11750 \times \frac{280}{1000}$

= 3290 रु. Ans.

11. धातु के तीन समान घनों की कोर क्रमशः 3 से.मी., 4 से.मी. और 5 से.मी. है । इन्हें पिघलाकर एक नया घन बनाया गया । इस घन की कोर की ल. ज्ञात कीजिए ?
12. एक मैदान 150 मी. लम्बा और 100 मी. चौड़ा है । मैदान से बाहर एक तालाब से मिट्टी खोदकर मिट्टी को मैदान में समान रूप से फैला दिया जाता है । यदि तालाब में खोदा गया गड्ढा 200 मी., लम्बा, 50 मी. चौड़ा और 0.75 मी. गहरा है, तो मैदान का धरातल कितना ऊँचा उठ जायेगा ?
13. एक हौज का पैदा वर्गाकार है जिसकी भुजा 5 मी. है । इस हौज ममें उतना ही पानी आता है जितना कि एक दूसरे हौज में जिसकी ल. चौ. और गहराई क्रमशः 7.5 मी., 4 मी. और 2.5 मी. है । पहले हौज की गहराई ज्ञात कीजिए ?
14. 27 मी. लम्बी, 4 मी. ऊँची और 50 से.मी मोटी दीवार बनाने के लिए 25 से.मी \times 15 से.मी. \times 6 से.मी. की कितनी ईंटों की आवश्यकता होगी जबकि 10% स्थान चूने का हो और दीवार में 2 मी. \times 1 मी. आकार के 4 दरवाजे हो ?
15. एक पानी की हौज का पैदा वर्गाकार है, जिसकी भुजा 3 मी. है । इसमें 13,500 लीटर पानी भरा हुआ है, तो पानी की गहराई ज्ञात कीजिए ?

16. यदि एक समकोणिक समान्तर षट्फलक की ल. चौ. और ऊँ. का अनुपात 6:5:4 है और उसका संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्र. 33300 वर्ग से.मी. है तो समकोणिक समान्तर षट्फलक का आयतन ज्ञात कीजिए ?

Lesson - 10

बेलन, शंकु और गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

1. एक बेलन की ऊँचाई 7से.मी तथा आधार की त्रिज्या 3 से.मी. है, तो बेलन का संपूर्ण पृष्ठ और आयतन ज्ञात कीजिए ?

Ans. बेलन की ऊँ (h) = 7 से.मी.

त्रिज्या (r) = 3 से.मी

अतः बेलन का संपूर्ण पृष्ठ = $2\pi(h+r)r$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times (7+3) \times 3 \text{ वर्ग से.मी.}$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 10 \times 3 \text{ वर्ग से.मी.}$$

$$= \frac{1320}{7} \text{ वर्ग से.मी}$$

$$= 188.57 \text{ वर्ग से.मी.}$$

बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$

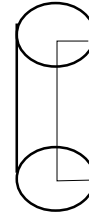
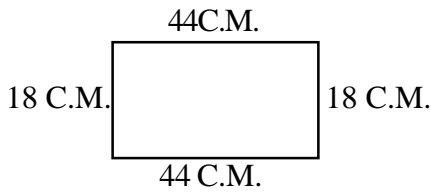
$$= \frac{22 \times (3)^2 \times 7}{7} \text{ घन से.मी.}$$

$$= \frac{22 \times 9 \times 7}{7} \text{ घन से.मी.}$$

$$= 198 \text{ घन से.मी. Ans.}$$

2. एक आयताकार कागज की माप 44 से.मी \times 18 से.मी. है । इसे लम्बाई की ओर मोड़कर एक बेलन बनाया जाता है । बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए ?

Ans. जब आयताकार कागज को ल. की ओर मोड़ा जाता है तो कागज की ल. और चौ. बेलन के आधार की परिधि और ऊँ. होती है ।



माना बेलन के आधार की त्रिज्या r तथा ऊँ h है तो

बेलन की ऊँ (h) = 18 से.मी.

तथा आधार की परिधि = कागज की ल.

$$2\pi r = 44 \text{ से.मी.}$$

$$r = \frac{44}{2\pi} = 44 \times \frac{7}{2 \times 22} \text{ से.मी.}$$

$$= 7 \text{ से.मी.}$$

अतः बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times (7)^2 \times 18 \text{ घन से.मी}$$

$$= \frac{22}{7} \times 49 \times 18 \text{ घन से.मी}$$

$$= 2772 \text{ घन से.मी. Ans.}$$

3. एक बेलन की त्रिज्या और ऊँचाई का अनुपात 5:7 तथा इसका आयतन 550 घन से.मी. है । बेलन का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ?

Ans. माना बेलन की त्रिज्या 5r तथा ऊँचाई 7r है ।

बेलन का आयतन = 550 घन से.मी

$$= \pi r^2 h = 550$$

$$= \frac{22}{7} \times (5r)^2 \times 7r = 550$$

$$= 22 \times 25r^3 = 550$$

$$= 550r^3 = 550$$

$$= r^3 = 1 \text{ से.मी.}$$

$$= r = 1 \text{ से.मी.}$$

बेलन की त्रिज्या (r) 5 से.मी. और ऊँचाई (h) 7 से.मी. है

अतः बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ = $2\pi r(r+h)$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 12 \times 5 = \frac{2640}{7} \text{ वर्ग से.मी.}$$

$$= 377.19 \text{ वर्ग से.मी. Ans.}$$

4. एक रोलर की ल. 2 मी. और व्यास 1.4 मी. है । ज्ञात कीजिए कि 5 चक्कर लगाने में रोलर कितना क्षेत्र तय करेगा ?
5. एक बेलन का आयतन 1650 घन से.मी. तथा वक्र पृष्ठ 660 वर्ग से.मी. है । बेलन की त्रिज्या और ऊँचाई ज्ञात कीजिए ?
6. 55 वर्ग से.मी. लोहे के टोस से लम्बवृत्तीय बेलनाकार सरिया बनाया जाता है । यदि सरिया का त्रिज्या 0.5 से.मी. हो तो सरिया की ल. ज्ञात कीजिए ?
7. एक खोखले बेलन की ऊँचाई 21 डेसी मीटर है तथा इसके ब्राह्म व्यास और अतः व्यास क्रमशः 10 से.मी व 6 से.मी. है बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए ?
8. एक आयाताकार कागज का टुकड़ा 30 से.मी. \times 18 से.मी माप है । इसे ल. तथा चौ. की ओर मोड़कर बेलन बनाए जा सकते हैं । दोनों तरह प्राप्त बेलनों के आयतनो का अनुपात ज्ञात कीजिए ?
9. एक बेलनाकार लोहे का रोलर 1 मी. चौड़ा है । इसका अन्तः व्यास 54 से.मी. है । रोलर पर 9 से.मी. की लोहे की परत चढ़ाई जाती है यदि 1 घन से.मी. लोहे का वजन 8 ग्राम हो तो रोलर का वजन ज्ञात कीजिए ?
10. एक टैन्ट शंकु के आकार का है । जिसके आधार की त्रिज्या 7 मी. तथा ऊँचाई 5 मी. है । टैन्ट में लगने वाले कपड़े का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ?

Ans. टैन्ट के आधार की त्रिज्या (r) = 7 मीटर

$$\text{ऊँचाई (h) = 5 मीटर}$$

$$\text{टैन्ट की तिर्यक ऊँचाई (L) = } \sqrt{h^2 + r^2}$$

$$\begin{aligned} (L) &= \sqrt{5^2 + 7^2} \\ &= \sqrt{25 + 49} \\ &= \sqrt{74} = 8.6 \text{ मी. (लगभग)} \end{aligned}$$

अतः टैन्ट में लगने वाले कपड़े का क्षेत्रफल = $\pi r L$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 8.6 \text{ वर्ग मी.}$$

$$= 189.2 \text{ वर्ग मी. Ans.}$$

11. एक शंकु की त्रिज्या और ऊँचाई का अनुपात 3 : 4 है । यदि इसका आयतन 301.44 घन से.मी. हो तो शंकु की त्रिज्या और तिर्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए ?

माना शंकु की त्रिज्या (r) और ऊँचाई h है । अतः प्रश्नानुसार $r = 3X$ और $h = 4X$ है ।

शंकु का आयतन = 301.44 घन से.मी.

$$\longrightarrow \frac{1}{3} \pi r^2 h = 301.44$$

$$\longrightarrow \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (3X)^2 \times 4X = 301.44$$

$$X^3 = \frac{301.44 \times 7}{22 \times 3 \times 4} = 8 \text{ घन से.मी.}$$

$$X = 2 \text{ से.मी.}$$

$$\text{त्रिज्या } r = 3X = 6 \text{ से.मी.}$$

$$\text{ऊँचाई } h = 4X = 8 \text{ से.मी.}$$

$$\text{तथा तिर्यक ऊँचाई } L = \sqrt{h^2 + r^2}$$

$$\sqrt{8^2 + 6^2} \text{ से.मी.}$$

$$\sqrt{64 + 36} \text{ से.मी.}$$

$$\sqrt{100} = 10 \text{ से.मी.}$$

12. एक शंकु की ऊँचाई 24 से.मी. तथा वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल 550 वर्ग से.मी. है । इसका आयतन ज्ञात कीजिए ?

Ans. त्रिज्या = r तिर्यक ऊँ = L

$$L = \sqrt{h^2 + r^2}$$

$$= \sqrt{(24)^2 + r^2} \text{ से.मी.}$$

शंकु का पृष्ठीय क्षे. = 550 वर्ग से.मी

$$\pi r l = 550$$

$$\frac{22}{7} \times r \times \sqrt{(24)^2 + r^2} = 550$$

$$r \sqrt{576 + r^2} = 25 \times 7$$

$$r^2 \times \sqrt{576 + r^2} = 25 \times 7$$

$$r^2 (576 + r^2) = (25 \times 7)^2$$

$$= r^4 + 576r^2 - 625 \times 49 = 0$$

$$= (r^2 + 625)(r^2 - 49) = 0$$

$$= r^2 - 49 = 0$$

$$= r = 7 \text{ c.m.}$$

$$\text{शंकु का आयतन} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (7)^2 \times 24 \text{ घन से.मी.}$$

$$= 1232 \text{ घन से.मी. Ans.}$$

13. एक अर्द्धवृत्ताकार कागज का व्यास 24 से.मी है । इसे मोड़कर एक खुला शंक्वाकार कप बनाया जाता है । कप की गहराई और आयतन ज्ञात कीजिए ?

Ans. जब किसी अर्द्धवृत्ताकार कागज को मोड़कर एक खुला शंक्वाकार बनाया जाता है तो कागज की त्रिज्या, शंकु की तिर्यक ऊँचाई तथा कागज की परिधि शंकु के आधार का परिमाण होगा ।

कप की तिर्यक ऊँचाई $L = 12$ से.मी.

माना शंक्वाकार कप की त्रिज्या r तथा ऊँचाई (गहराई) h है तो

शंक्वाकार कप के आधार का परिमाण = कागज की अर्द्धपरिधि ACB

$$\text{या } 2\pi r = \pi \times 12$$

$$r = 6 \text{ से.मी.}$$

$$\text{अब } l^2 = h^2 + r^2 \text{ से}$$

$$h = \sqrt{l^2 - r^2}$$

$$= \sqrt{(12)^2 - (6)^2} = 6\sqrt{3} \text{ से.मी}$$

$$h = 6 \times 1.732 = 10.38 \text{ c.m.}$$

$$\text{कप की गहराई} = 10.38 \text{ से.मी}$$

$$\text{कप का आयतन} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (6)^2 \times 10.38 = 391.47 \text{ घन से.मी. Ans.}$$

14. एक शंकु के आधार की त्रिज्या 7 से.मी और ऊँचाई 24 से.मी. है । शंकु की तिर्यक ऊँचाई, वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल, सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात कीजिए ?
15. दो शंकुओं के आधार का व्यास समान है । उनकी तिर्यक ऊँचाईयों का अनुपात 5 : 4 है । यदि छोटे शंकु का वक्र पृष्ठ 400 वर्ग से.मी. हो तो बड़े शंकु का वक्र पृष्ठ ज्ञात कीजिए ?
16. एक 9 मीटर ऊँचे शंकु के आकार के टैन्ट के आधार की परिधि 44 मी. है । इसके अंदर वायु का आयतन ज्ञात कीजिए ?
17. यदि किसी शंकु की ऊँ वक्रपृष्ठ और आयतन क्रमशः h, c , और v हो तो सिद्ध कीजिए $3 \pi v h^3 - c^2 h^2 + s v^2 = 0$?
18. एक शंकु के आकार के टैन्ट की ऊँचाई 14 मी. और आधार का क्षेत्र 346.5 वर्ग मी. है । यह टैन्ट 1.5 मी. चौड़े केनवास से बना हुआ है, तो केनवास की ल. ज्ञात कीजिए ?
19. एक शंकु की ऊँचाई 3.6 से.मी. और आधार की त्रिज्या 1.6 से.मी है । इसे पिघलाकर एक नया शंकु बनाया जाता है । जिसके आधार की त्रिज्या 1.2 से.मी. है, तो ऊँचाई ?
20. एक त्रिज्यखण्ड की त्रिज्या 12 से.मी. और कोण 120 है । इसकी सीधी फोरो की संपाती करके एक शंकु बनाया जाता है । शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए ?

Lesson - 1

बिन्दू और संगामी रेखाएँ

प्रमेय :-

प्रमेय 1. त्रिभुज की भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक संगामी होते हैं ।

प्रमेय 2. त्रिभुज के कोणों के समद्विभाजक होते हैं ।

प्रमेय 3. त्रिभुज के तीनों शीर्षलम्ब संगामी होते हैं ।

दिया है :- $\triangle ABC$ के AD व CF लम्ब हैं ।

सिद्ध करना है :- AD , BE व CF एक ही बिन्दू से होकर जाते हैं ।

रचना :- चित्र 1.10 के अनुसार समान्तर रेखाएँ खींचकर PQR बनाया ।

उपपत्ति :- चतुर्भुज $BCAR$ में,

$ACIRB$ (रचना से) और $BCIIRA$ (रचना से)

$BCAR$ एक समान्तर चतुर्भुज है ।

अतः $RA = BC$, -(1) इसी प्रकार $ABCQ$ भी एक समान्तर चतुर्भुज है ।

अतः $AQ = BC$ -(2)

(1) और (2) से $AR = AQ$ -(3)

व $ADIBC$ और $BCIQR$

अतः $ADIQR$ -(4)

समी. (3) व (4) से AD भुजा QR का लम्ब समद्विभाजक है । इसी प्रकार BE व CF क्रमशः PR व PQ के लम्ब समद्विभाजक हैं । इस प्रकार AD , BE और CF , PQR की भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक हैं । अतः AD , BE और CF एक ही बिन्दू से होकर जाते हैं ।

"इति सिद्धम्"

प्रमेय-4 त्रिभुज की माध्यिकाएँ एक ही बिन्दू से होकर जाती हैं और यह बिन्दू प्रत्येक माध्यिका को 2:1 के अनुपात में विभाजित करता है ।

Q.1 उस वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिये, जो दिये हुये बिन्दुओं से होकर जाता है ?

Ans. बिन्दु A और B दो दिए हुए बिन्दु हैं, जिनसे जाने वाले वृत्तों के केन्द्र P, Q और R हैं ।

सिद्ध करना है :- PQ और R का बिन्दु पथ, A, B , का लम्ब समद्विभाजक है ।

उपपत्ति :- बिन्दु P ऐसे वृत्त का केन्द्र है जो बिन्दुओं A तथा B से जाता है ।

P , A और B से समदूरस्थ है ।

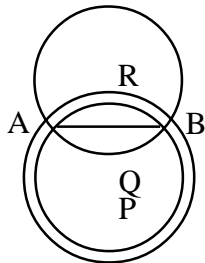
P, A, B , के लम्ब समद्विभाजक पर है ।

इसी प्रकार Q तथा R भी ऐसे वृत्तों के केन्द्र हैं जो बिन्दुओं A तथा B से होकर जाते हैं अतः Q तथा R बिन्दुओं A तथा B से समदूरस्थ हैं ।

Q तथा R , AB के लम्ब समद्विभाजक पर हैं ।

P, Q तथा R , रेखाखण्ड AB के लम्ब समद्विभाजक पर हैं ।

P, Q , तथा R वृत्त-केन्द्रों का बिन्दु पथ AB समद्विभाजक है ।



Q.2 तीन असंख्य बिन्दुओं से सदैव समान दूरी पर बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिये ?

Ans. दिया है :- तीन असंख्य बिन्दु A, B व C हैं ।

सिद्ध करना है :- A, B तथा C समदूरस्थ बिन्दुओं का बिन्दुपथ

रचना :- AB, BC तथा CA को मिलाइये तथा AB, BC व CA के लम्ब समद्विभाजक OF, OD तथा OE खींचे जो O पर प्रतिच्छेद करते हैं ।

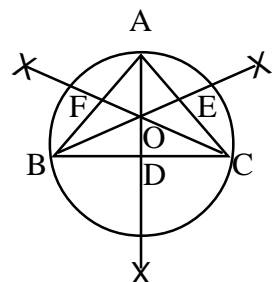
उपपत्ति :- चूंकि O, B, C , के लम्ब समद्विभाजक पर स्थित है ।

$OB = OC$ -(1) इसी प्रकार $OA = OB$ -(2)

समी. (1) व (2) से

$OA = OB = OC$

केवल व बिन्दु ही A, B, C से समदूरस्थ है ।



Continue

अतः हम कह सकते हैं कि अभिष्ट बिन्दु उस वृत्त का केन्द्र है जो ज्ञात तीन असरेख बिन्दुओं से गुजरता है। इसे वृत्त का परिकेन्द्र कहते हैं।

Q.3 तीन $\triangle ABC$, माध्यिकाएँ AD, BE और CF बिन्दु G पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिये कि $AD+BE > \frac{3}{2} AB$ (संकेत $AGBG)AB$)

Ans. दिया है :- AD, BE और CF , $\triangle ABC$ को तीन माध्यिकाएँ हैं जो G पर प्रतिच्छेद करती हैं।

सिद्ध करना है :- $AD+BE > \frac{3}{2} AB$

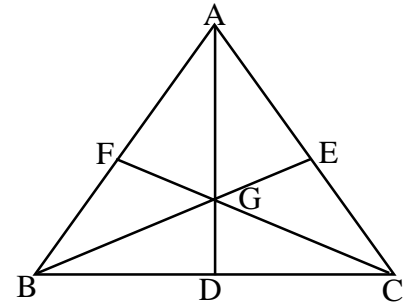
उपपत्ति :- $BG+GE = BE$

$$\frac{BG}{BG} + \frac{GE}{BG} = \frac{BE}{BG} \quad (BG \text{ से दोनों पक्षों को भाग करने पर})$$

$$1 + \frac{GE}{BG} = \frac{BE}{BG}$$

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{BE}{BG} \quad (GE:BG = 1:2)$$

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{BE}{BG} \quad 2BE = 3BG \quad BE = \frac{3}{2} BG \quad (1)$$



इसी तरह से $AG+GD = AD$

$$\frac{AG}{AG} + \frac{GD}{AG} = \frac{AD}{AG} \quad \text{दोनों तरफ } AG \text{ से भाग देने पर}$$

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{AD}{AG} \quad \text{-----}(2)$$

समी. (1) और (2) को जोड़ने पर

$$AD+BE = \frac{3}{2} AG + \frac{3}{2} BG$$

$$AD+BE = \frac{3}{2} (AG+BG) \quad \text{-----}(3)$$

परन्तु $\triangle AGB$ में

$$AG+BG < AB$$

$$\frac{3}{2} (AG+BG) < \frac{3}{2} AB \quad \text{-----}(4)$$

समी. (3) और (4) से

$$AD+BE > \frac{3}{2} AB \quad (\text{यही सिद्ध करना था})$$

Q.4 सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज की दो माध्यिकाओं का योग तीसरी माध्यिका से अधिक होता है।

Q.5 सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज की माध्यिकाएँ एक ही बिन्दु से होकर जाती हैं और वह बिन्दु प्रत्येक माध्यिका से 2:1 के अनुपात में विभाजित करता है।

Lesson - 2

चतुर्भुज

प्रमेय :-

प्रमेय 1 समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।

प्रमेय 2 समान्तर चतुर्भुज के सम्मुखकोण बराबर होते हैं।

दिया है - $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

सिद्ध करना है :- $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$

उपपत्ति :- $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है अतः $AB \parallel DC$ व $AD \parallel BC$ है।

$$\angle A + \angle D = 180^\circ \quad (\text{क्रमागत अन्त कोण}) \quad \text{-----}(1)$$

$$\angle C + \angle B = 180^\circ \quad (\text{क्रमागत अन्त कोण}) \quad \text{-----}(2)$$

समी. (1) व (2) से

$$\angle A + \angle D = \angle C + \angle B$$

$$\angle A = \angle C$$

इसी प्रकार $\angle B = \angle D$

(इतिसिद्धम)

प्रमेय-3. समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समद्विभाजित करते हैं ।

प्रमेय-4. एक चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज होता है यदि उसकी सम्मुख भुजाओं का एक युग्म परस्पर बराबर व समान्तर है ।

प्रमेय-5. यदि एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण परस्पर बराबर व लम्बवत् हो तो यह एक वर्ग होता है ।

प्रमेय-6. त्रिभुज को दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड तीसरी भुजा के समान्तर और उसका आधा होता है ।

दिया है :- त्रिभुज ABC में, बिन्दु D और E क्रमशः भुजाओं AB और AC मध्य बिन्दु हैं ।

सिद्ध करना है :- (i) $DE \parallel BC$ (ii) $DE = \frac{1}{2}BC$

रचना :- DE को F तक बढ़ाया, जहां $EF=DE$, C को F से मिलाया ।

उपपत्ति :- ABC और CFE में

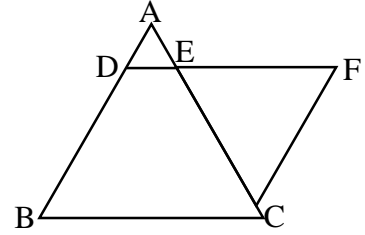
$AE=CE$ (दिया है) $\angle AED = \angle CEF$ = (शीर्षाभिमुख कोण)

$AE=EF$ (रचना से)

अतः भुजा कोण युजा सर्वांगसमता गुणधर्म से

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएं और कोण समान होंगे ।

$AD = CF$ (1) $\angle EAD = \angle EFC$ -----(2)



तिर्यक रेखा AC रेखाओं AB और CF को प्रतिच्छेद करती है । और एकान्तर कोण EAD तथा ECF बराबर है । $AD \parallel CF$ और $BD \parallel CF$(3)

परन्तु दिया है कि $AD=BD$

समी. (1) और (3) से

$$BD = CF$$

अर्थात् $BD=CF$ और $BD \parallel CF$

अतः BCFD एक समान्तर चतुर्भुज है ।

DF व BC भी समान और समान्तर है ।

या $DE \parallel BC$ $DE = \frac{1}{2} DF$ (रचना से)

अतः $DE = \frac{1}{2} BC$

“इतिसिद्धम्”

प्रमेय-7 (प्रमेय 6 का विलोम)

त्रिभुज की एक भुजा के मध्य बिन्दु से, एक अन्य भुजा के समान खींची गई रेखा, तीसरी रेखा को समद्विभाजित करती है ।

प्रमेय-8 यदि तीन या अधिक समान्तर रेखाएं हो और उनके द्वारा एक तिर्यक रेखा पर बनाये गये अन्तः खण्ड बराबर हो तो किसी अन्य तिर्यक रेखा पर संगत अन्तः खण्ड भी बराबर होंगे ।

प्रमेय-9. एक ही आधार और एक ही समान्तर रेखाओं के बीच के समान्तर रेखाओं के बीच के चतुर्भुज के क्षेत्रफल बराबर होते हैं ।
दिया है :- दो समान्तर चतुर्भुज ABCD और ABFE, जिनका आधार AB है, जो समान्तर रेखाओं AB और DF के मध्य स्थित है ।

सिद्ध करना है :- समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = समान्तर चतुर्भुज ABFE का क्षेत्रफल

उपपत्ति :- ADE और BCF में

$AE=BF$ (समान्तर चतुर्भुज ABFE की सम्मुख भुजा)

$\angle DAE = \angle CBF$ (संगत कोण)

$AD \parallel BC$ (समान्तर चतुर्भुज ABCD की

सम्मुख भुजा अर्थात् भुजा कोण भुजा सर्वांगसमता गुणधर्म से)

$$\angle ADE = \angle BCF$$

अतः क्षेत्रफल (ADE) = क्षेत्रफल (BCF)

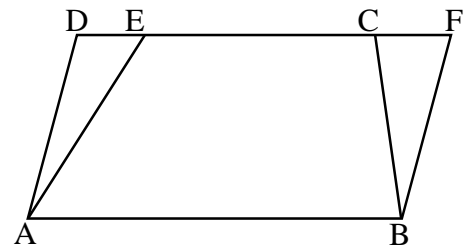
दोनों पक्षों का क्षेत्रफल (ABCF) जोड़ने पर

क्षेत्रफल (ADE) + क्षेत्रफल (ABCF)

$$= \text{क्षेत्रफल (ADE) + क्षेत्रफल (ABCF)}$$

$$\text{क्षेत्रफल (ABCD) = (ABFE)}$$

“इतिसिद्धम्”



बोधायन प्रमेय

प्रमेय 10. किसी समकोण त्रिभुज में, कर्ण से बना वर्ग अन्य दोनो भुजाओं पर वर्गों के योग के बराबर होता है ।

दिया है :- ABC में समकोण है, और भुजाओं AB, BC और CA पर बने वर्ग क्रमशः ABED, CBFG और ACHK है

सिद्ध करना है :- वर्ग ADHB = वर्ग ACHK + वर्ग CBFG

उपपत्ति :- $\angle BAD = \angle CAK = 90^\circ$

दोनों पक्षों में $\angle CAB$ जोड़ने पर

$$\angle BAD + \angle CAB = \angle CAK + \angle CAB$$

$$\angle CAD = \angle BAK$$

Continue

अब BAK और CAD में
 AB=AD (वर्ग ABED की भुजाएं)
 $\angle BAK = \angle CAD$ [(1) से]
 AK=AC (वर्ग ACHK की भुजाएं)
 भु को भु सर्वांगसमता गुणधर्म से
 BAK CAD

पुनः $\angle BCA = \angle ACH = 90^\circ$
 $\angle BCA + \angle ACH = 180^\circ$

अर्थात् BCH एक सरल रेखा है ।

CHIAK (वर्ग ACHK की सम्मुख भुजा)

BAK और वर्ग ACHK एक ही आधार AK

तथा समान्तर रेखाओं AK और BH के मध्य स्थित है ।

अतः $BAK = \frac{1}{2}$ वर्ग ACHK------(3)

इसी प्रकार ADC और आयत ADML एक ही आधार AD और समान्तर रेखाओं AD व CM के मध्य स्थित है अतः

$CAD = \frac{1}{2}$ आयत ADML(4)

समी. (2) (3) (4) से

$CAD = BAK = \frac{1}{2}$ वर्ग ACHK

$= \frac{1}{2}$ आयत ADML

वर्ग ACHK = आयत ADML(5)

इसी प्रकार वर्ग CCFG = आयत LMFB----- (6)

समी. (5) व (6) से

आयत ADML + आयत MEB वर्ग ACHK वर्ग (CFG)

वर्ग ADEB = वर्ग ACHK+ वर्ग CCFG इतिसिद्धम

बौधायन प्रमेय का विलोम

किसी त्रिभुज में, यदि एक भुजा का वर्ग अन्य दोनो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर हो तो प्रथम भुजा के सामने का कोण समकोण होता है ।

Q.1 दिये गये चित्र में ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है । AP और CQ क्रमशः $\angle A$ और $\angle C$ के समद्विभाजक है । सिद्ध कीजिए कि APCQ एक समान्तर चतुर्भुज है ।

Ans. दिया हुआ है :- ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है ।

उपपत्ति =ABIICD

अतः AQIIPC

DPA व BQC में $\angle B = \angle D$ (1)

AD=BC (2)

$\frac{1}{2} \angle A = \frac{1}{2} \angle C$ अतः.....(3)

ASA प्रमेय द्वारा

DPA= QBC अतः AC=AB

C- P = AB-QB.....(4)

PC = AQ

P = QB व AP = QC(5)

अतः CP = QA

अतः APIICQ [APCQ एक समान्तर चतुर्भुज होगा] इतिसिद्धम

Q.2 दिये गये चित्र में ABCD और ABEF समान्तर चतुर्भुज है । सिद्ध कीजिए कि CDEF समान्तर चतुर्भुज है ।

Ans. दिया हुआ है :- ABCD और ABEF

समान्तर चतुर्भुज है ।

रचना :- समान्तर चतुर्भुज ABCD की भुजा AB को आगे बढ़ाया जाया

है जो कि CE भुजा पर बिन्दु G पर काटता है ।

उपपत्ति :- दिया गया है । कि ABCD और ABEF समान्तर चतुर्भुज है ।

ABIICD और ADIIBC

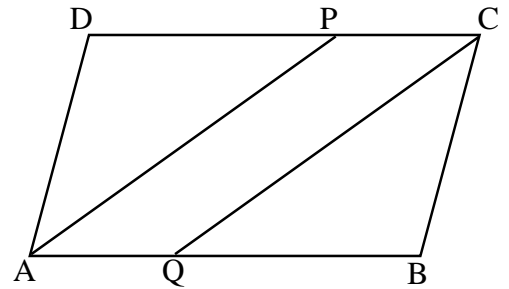
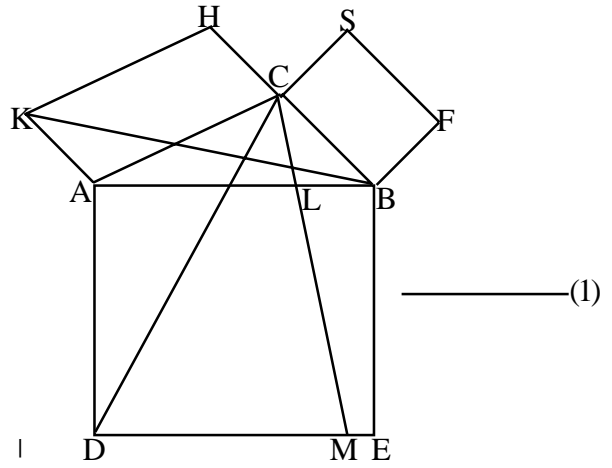
AB =CD, AD = BC

इसी प्रकार से, EFIIAB और AFIIBE व

EF=AB और AF=BE व

दोनो को मिलाने पर स्पष्ट है कि

FEIICD और FE = DC



अब इस DAF और CBE में देखेंगे ।

ADIIBC

$$\angle DAH = \angle CBG$$

इसी तरह से

AFIIBE

$$\angle HAF = \angle GBE$$

इस आधार से हम कह सकते हैं कि

DAF और CBE में

$$\angle DAF = \angle CBE$$

$$DAF = CBE$$

$$DF = CE \text{ और } DFIICE$$

अतः हम कह सकते हैं कि CDFE एक समान्तर चतुर्भुज होगा ।

इतिसिद्धम

Q.3 सिद्ध कीजिये कि एक समकोण त्रिभुज के कर्ण को समद्विभाजित करने वाली माध्यिका कर्ण की आधी होती है ।

Q.4 सिद्ध कीजिये कि एक आयत की भुजाओं के युग्मों के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से एक समचतुर्भुज बनता है ।

Ans. दिया है :- आयत ABCD जिसमें भुजा AB, BC, CD व DA के मध्य बिन्दु क्रमशः E, F, G व H है ।

रचना :- EFGH को मिलाया तथा AC विकर्ण खींचा

उपपत्ति :- ABC में $EF = \frac{1}{2} AC$ तथा $GH = \frac{1}{2} AC$

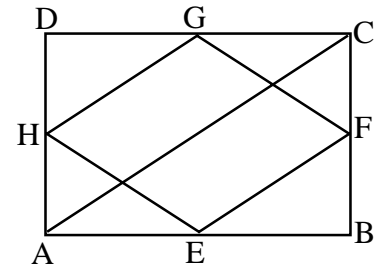
अतः $EF = GH$ इसी प्रकार $HE = GF$

क्योंकि आयत के विकर्ण समान होते हैं $AC = BD$

इसी प्रकार $HG = EF$ आयत के विकर्ण बराबर होते हैं अतः

$$HE = EF = GH = HG$$

अतः HEFG एक समचतुर्भुज होगा ।



Q.5 एक समतल भूमि पर दो खम्भे 7 मी. और 12 मी. लम्बे खड़े हैं । यदि उनके पादों के बीच में 12 मी. की दूरी हो तो उनके उपरी सिरो के बीच की दूरी ज्ञात कीजिये ?

Q.6 एक समबाहु त्रिभुज के शीर्षलम्ब की ल. और क्षे. ज्ञात कीजिये, जिसकी भुजा की ल. a है ।

Q.7 एक समबाहु त्रिभुज ABC में, AD भुजा BC पर लम्बवत् हो, तो सिद्ध कीजिये कि $-3AB^2 = 4AD^2$

Q.8 सिद्ध कीजिये कि त्रिभुज की माध्यिका उसका समान क्षे. वाले दो त्रिभुजा में विभाजित करती है ।

Ans. दिया हुआ है :- ABC एक त्रिभुज है ।

जिसमें AD भुजा BC की माध्यिका है ।

सिद्ध करना है :- ABC का क्षे. = ADC का क्षे.

रचना :- A से BC पर लम्ब AM की रचना करो

उपपत्ति :- AD भुजा BC की माध्यिका है ।

D, BC का मध्य बिन्दु है ।

यानी $BD = DC$

त्रिभुज ABC और ADC के आधार एक ही रेखा पर होने और

त्रिभुजों के शीर्ष Common होने से AM दोनों त्रिभुजों की ऊँचाई

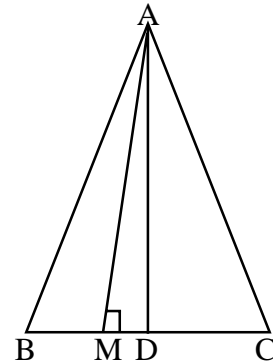
$$ABC \text{ का क्षे.} = \frac{1}{2} \times BD \times AM$$

$$ADC \text{ का क्षे.} = \frac{1}{2} \times DC \times AM$$

लेकिन $BD = DC$

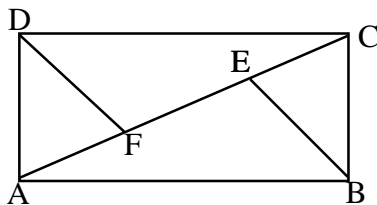
$$ABD \text{ का क्षेत्र.} = ADC \text{ का क्षे.}$$

अतः किसी त्रिभुज की माध्यिका उस त्रिभुज को दो बराबर क्षे. के त्रिभुजों में बांटती है । इतिसिद्धम



Q.9 दी गई आकृति में एक समान्तर चतुर्भुज है, जिसके विकर्ण AC पर BE और DE क्रमशः B और D से लम्ब डाले गये हैं । सिद्ध कीजिये कि - (i) $\angle BAE \cong \angle DCF$

Ans. (i) BAF व DCF में



- Q.10 सामने के चित्र में ABCD कोई चतुर्भुज है । H,E,F और G क्रमशः AB, BC, CD और DA के मध्य बिन्दु है । क्या HEFG एक समान्तर चतुर्भुज है, क्यों ?
(संकेत GFIIAC और $GF = \frac{1}{2}AC$ क्यों ?
HEIIAC और $HE = \frac{1}{2}AC$ क्यों ?
GFIIHE और GFIIHE

Ans. उपपत्ति :- ABC में H,E, क्रमशः AB तथा BC के मध्य बिन्दुओं का मिलाने वाली रेखा है ।

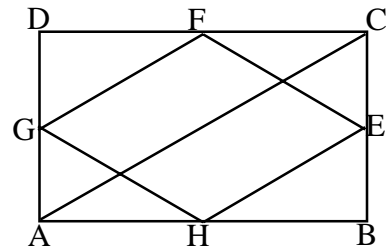
$$HE = \frac{1}{2}AC \text{ तथा HEIIAC} \dots\dots\dots(1)$$

YAC में G,F क्रमशः AD तथा (1) के मध्य बिन्दु है ।

$$GF = \frac{1}{2}AC \text{ तथा GFIIAC} \dots\dots\dots(2)$$

(1) व (2) ये $HE = GE$ तथा HEIIIGF

चतुर्भुज HEFG एक समान्तर चतुर्भुज है ।



Lesson - 3

वृत्त

प्रमेय :-

प्रमेय-1 यदि किसी वृत्त (या सर्वांगसम वृत्त) के दो चाप परस्पर सर्वांगसम हो तो उनकी संगत जीवाएं भी समान होती है ।

प्रमेय-2 वृत्त के केन्द्र से किसी जीवा पर खींचा गया लम्ब उस जीवा को लम्ब समद्विभाजित करता है ।

दिया है :- चित्र में वृत्त की जीवा AB पर केन्द्र O से लम्ब OM है ।

सिद्ध करना है :- $AM = MB$

रचना :- OA और OB को मिलाया

उपपत्ति :- AOM और BOM में

$$OA = OB \text{ (वृत्त की त्रिज्या)}$$

$$OM = OM \text{ (उभयनिष्ठ भुजा)}$$

$$\angle OMA = \angle OMB \text{ (समकोण)}$$

समकोण कर्ण भुजा सर्वांगसमता गुणधर्म से

$$AOM \cong BOM$$

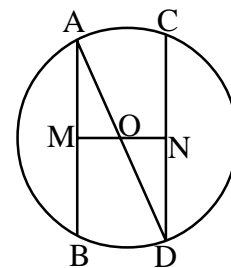
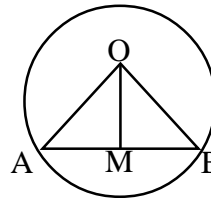
अतः सर्वांगसमता त्रिभुजों की संगत भुजाएं समान होगी ।

अर्थात् $AM = MB$ इतिसिद्धम

प्रमेय-3 वृत्त की समान जीवाएं केन्द्र के समदूरस्थ होती है ।

दिया है = चित्र में दो समान जीवाएं AB व CD है ।

सिद्ध करना है $OM = ON$ है ।



प्रमेय-4 किसी वृत्त की जीवाएं जो वृत्त के केन्द्र के बराबर दूरी पर हैं परस्पर बराबर होती है ।

दिया है :- चित्र में जीवाएं AB और CD केन्द्र O से समान दूरी पर हैं, अर्थात् $OM = ON$

सिद्ध करना है :- $AB = CD$

रचना :- OA और OD को मिलाया

उपपत्ति :- OMA और OND में

$$OM = ON \text{ (दिया है)}$$

$$OA = OD \text{ (वृत्त की त्रिज्या)}$$

$$\angle OMA = \angle OND \text{ (समकोण)}$$

समकोण कर्ण भुजा गुणधर्म से

$$OMA \cong OND$$

अतः सर्वांगसम त्रिभुजों की संगत भुजाएं समान होगी ।

अर्थात् $AM = DN$

या $2AM = 2DN$

$$AB = CD \text{ इतिसिद्धम}$$

Q.1 चित्र में O और O' दिए गये वृत्तों के केन्द्र हैं । ABIIOC, OCIIAB और O'EIIAB सिद्ध कीजिये कि $AB = 200'$

Ans. उपपत्ति :- ABIIOD', ODIIAB, O'EIIAB

$$BE = EC$$

$$BC = 2EC \quad (1)$$

इसी प्रकार से ODICD

$$CD = DA$$

$$CA = 2CD \quad (2)$$

समी. (1) तथा (2) को जोड़ने पर

$$BC + CA = 2EC = 2CD = 2(CC + CD)$$

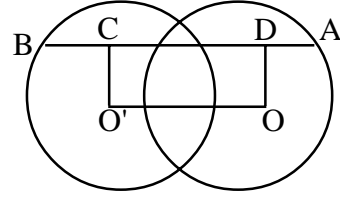
$$AB = 2ED$$

परन्तु O'OED एक आयत है ।

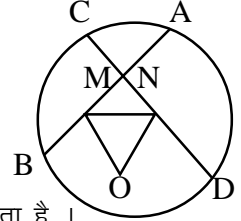
$$ED = O'O$$

$$AB = 2O'O \text{ इतिसिद्धम}$$

- Q.2 चित्र में AB और CD एक वृत्त की समान जीवाएं हैं। वृत्त का केन्द्र O है । OM ⊥ AB और ON ⊥ CD हो, तो सिद्ध कीजिये कि $\angle OMN = \angle ONM$



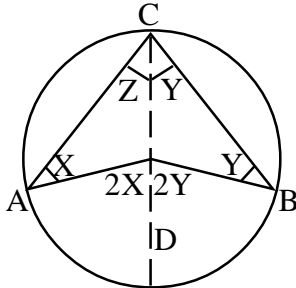
- Q.3 सिद्ध कीजिये कि एक वृत्त की जीवा का समद्विभाजक संगत चाप को समद्विभाजित करता है ।
 Q.4 5 CM और 4 CM त्रिज्याओं के दो वृत्त परस्पर A और B पर काटते हैं । यदि उभयनिष्ठ जीवा AB = 6 cm हो तो उनके केन्द्रों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिये ।
 Q.5 सिद्ध कीजिये कि वृत्त के दो चाप सर्वांगसम होते हैं यदि उनके द्वारा केन्द्र पर बने कोण समान हो ।
 Q.6 दो संकेन्द्रीय वृत्तों जिनका केन्द्र O है को एक सरल रेखा L, बिन्दुओं A, B, C व D पर इस प्रकार काटती है । कि AD = 12 cm, BC = 8 cm है । AB, CD, AC व BD की लम्बाइयां ज्ञात कीजिये ।



Lesson - 4

चाप और उसके द्वारा अन्तरित कोण

प्रमेय :- वृत्त के एक चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अन्तरित कोण, वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अन्तरित कोण का दुगना होता है ।



दिया है :- O केन्द्र वाले वृत्त में AB द्वारा केन्द्र पर बना कोण $\angle AOB$ व शेष परिधि के बिन्दु C पर $\angle ACB$ है ।

रचना :- C को O से मिलाकर आगे बढ़ाते हुये CD रेखा खींची ।

सिद्ध करना है :- $\angle AOB = 2\angle ACB$

उपपत्ति :- माना $\angle ACO = X$ तथा $\angle OCB = Y$

(1) $\angle ACO = \angle ACO = X$ { ACO में OA = OC = त्रिज्या है }

(2) $\angle OCB = \angle OCB = Y$ { OCB में OB = OC त्रिज्या है }

(3) $\angle AOD = 2X$ { AOC में बहिष्कोण $\angle AOD =$ उसके आंतरिक कोणों $\angle ACO$ व $\angle OAC$ के योग के बराबर है ।

(4) $\angle AOD = 2Y$ { BOC में बहिष्कोण $\angle DOB =$ उसके आंतरिक कोणों $\angle OCB$ व $\angle OBC$ के योग के बराबर है ।

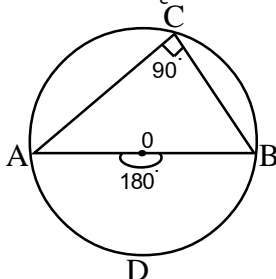
(5) $\angle ACB = (X + Y)$ { कथन (1) (2) के अनुसार तथा चित्रानुसार }

(6) $\angle AOB = 2(X + Y)$ { कथन (3) (4) के अनुसार तथा चित्रानुसार }

(7) $\angle ACB = 2\angle AOB$ { कथन (5) (6) के अनुसार }

HENSE PROVED

प्रमेय :- एक अर्द्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है ।



दिया है :- एक वृत्त जिसका केन्द्र O तथा व्यास AOB है । तथा अर्द्धवृत्त में बना कोण $\angle ACB$ है ।

सिद्ध करना है :- $\angle ACB = 90^\circ$

उपपत्ति :- (1) $\angle AOB = 180^\circ$ { वृत्त का व्यास है अर्थात् सरल रेखा पर बना कोण 180° होता है ।

(2) $\angle ACB = 180^\circ / 2 = 90^\circ$

Continue

{चाप ADB द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अन्तरित कोण $\angle AOB$ परिधि के अन्य बिन्दु C पर अन्तर्गत कोण $\angle ACB$ का दुगुना होता है}

HENSEN PROVED

Example IST चित्र में यदि व्यास EC जीवा AD के समान्तर हो तो $\angle ACB$ ज्ञात करो ?

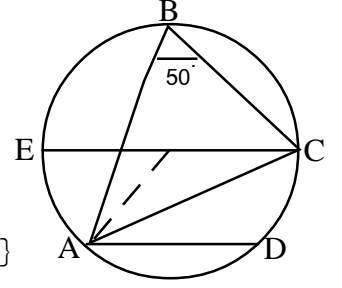
$$\angle ABC = 50^\circ \text{ [Given]}$$

$$\angle AOC = 100^\circ \text{ [प्रमेय अनुसार]}$$

$$\angle OAC = \angle OCA \text{ [} \angle AOC \text{ में } AO = OC \text{ होने में उनके सम्मुख कोण बराबर होते हैं]}$$

$$\angle OAC = \frac{1}{2} (180 - 100) \text{ [के तीनों कोणों का योग } 180^\circ \text{ होता है]} \\ 80 / 2 = 40^\circ$$

$$\angle CAD = 40^\circ \text{ [EC || AD है । तथा } \angle OCA \text{ व } \angle CAD \text{ एकान्तर कोण]}$$



Example IInd एक चतु. ABCD में $AB=AC=AD$ हो तो सिद्ध करो कि

$$\angle CAD = 2 (\angle BDC + \angle CBD)$$

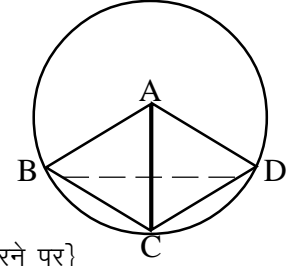
दिया है :- $AB=AC=AD$ तथा केन्द्र A हैं ।

$$(1) \quad 2\angle CBD = \angle CAD \text{ (प्रमेयानुसार)}$$

$$(2) \quad 2\angle BDC = \angle BAC \text{ (प्रमेयानुसार)}$$

$$(3) \quad 2(\angle CBD + \angle BDC) = \angle CAD + \angle BAC \text{ [(1) + (2) करने पर]}$$

$$(4) \quad \angle BAD = 2(\angle CBD + \angle BDC) \text{ (चित्रानुसार)}$$



Example IIIrd सिद्ध करो कि त्रिभुज की दो भुजाओं को व्यास मानकर खींचे गये वृत्त तीसरी भुजा को एक ही बिन्दु पर प्रतिच्छेद करते हैं ।

दिया है :- ABC की भुजा AB व AC को व्यास मानकर खींचे गये वृत्त हैं । जिनका बेंड P व Q है ।

रचना :- A को D से मिलाया है ।

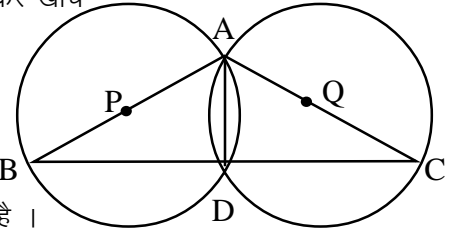
वह वृत्त जिसका केन्द्र P है PC को D पर करता है ।

सिद्ध करना है :- वृत्त (केन्द्र Q) BC को D पर काटता है ।

$$(1) \quad \angle ADB = 90^\circ \text{ [सीधी रेखा पर बने कोणों का योग } 180^\circ \text{ होता है]}$$

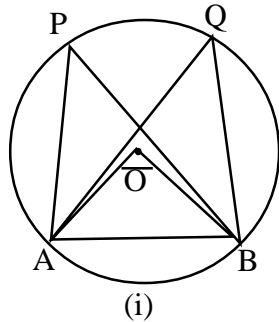
$$(2) \quad \angle ADC = 180 - 90 = 90^\circ \text{ [सीधी रेखा पर बने कोणों का योग } 180^\circ \text{ होता है]}$$

वृत्त जिसका केन्द्र Q है । BC को D पर काटता है ।

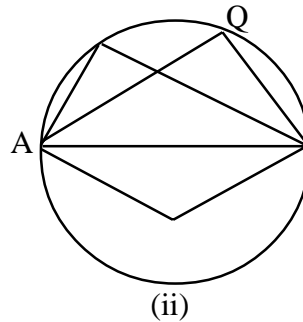


HENSEN PROVED

प्रमेय :- वृत्त के एक ही वृत्तखण्ड में स्थित कोण समान होते हैं ।



(i)



(ii)

दिया है :- O केन्द्र वाले वृत्त में चाप AB द्वारा केन्द्र पर कोण $\angle AOB$ तथा वृत्तखंड में बिन्दु P व Q पर $\angle APB$ व $\angle AQB$ है ।

सिद्ध करना है :- $\angle APB = \angle AQB$

रचना :- OA व OB को मिलाया ।

उपपत्ति :-

- (1) $\angle AOB = 2 \angle APB$ {प्रमेयानुसार}
 - (2) $\angle AOB = 2 \angle AQB$ {प्रमेयानुसार}
 - (3) $2 \angle APB = 2 \angle AQB$ {(1) व (2) के अनुसार}
- $$\angle APB = \angle AQB$$

HENSEN PROVED

प्रमेय :- वृत्त की समान जीवाये केन्द्र पर समान कोण बनाती है ।

चित्र में $X = ?$

Example :-

- (1) $\angle CAD = \angle CBD = 30^\circ$
(एक ही वृत्तखंड में बने कोण है ।)
- (2) $X = 180^\circ - (40^\circ + 80^\circ + 30^\circ)$
 $X = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$

(के तीनों कोणों का योग 180° होता है ।)

$X = 30^\circ$ Ans.

Question :- चित्र में जीता BC पर E बिन्दु इस प्रकार है कि $AB = AE$ है सिद्ध करो कि $EC = CD$

- (1) माना $\angle ABE = X$
 $\angle BEA = X$

{ $BA = AE$ होने से
सम्मुख कोण समान होंगे}

- (2) $\angle DEC = X$

{शीर्षाभिमुख कोण समान होते हैं}

- (3) $\angle EDC = X$

{एक ही वृत्तखण्ड में बने कोण
समान होते हैं}

$EC = CD$ {सम्मुख कोण समान होने से भुजायें भी समान होंगी ।

प्रमेय :- चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के युग्म का योग 180° होता है ।

दिया है :- ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है ।

सिद्ध करना है :- $\angle A + \angle C = 180^\circ$

तथा $\angle B + \angle D = 180^\circ$

- (1) $\angle D = \frac{X}{2}$

{चाप ABC केन्द्र O पर X कोण बनाता है । A तथा परिधि के बिन्दु D पर $\angle ADC$ बनाता है जो X का आधा है प्रमेयानुसार}

- (2) $\angle B = \frac{Y}{2}$

{प्रमेयानुसार}

- (3) $\angle B + \angle D = \frac{1}{2} (X + Y)$ {कथन (1) व (2) को जोड़ने पर}

- (4) $\angle B + \angle D = \frac{1}{2} (360^\circ)$ {X तथा Y एक बिन्दु के चारों ओर बने कोण है ।}

इसी प्रकार O को B व D से मिलाकर $\angle A + \angle C = 180^\circ$ सिद्ध किया जा सकता है ।

प्रमेय :- यदि चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का एक युग्म संपूरक हो, तो चतुर्भुज चक्रीय होता है ।

प्रमेय :- यदि किसी चतुर्भुज का बहिष्कोण उसके अन्तरभिमुख कोण के बराबर हो, तो वह एक चक्रीय चतुर्भुज होता है ।

Example :- ABCD एक चक्रीय चतु. है ।

$\angle AOC = 136^\circ$ तो

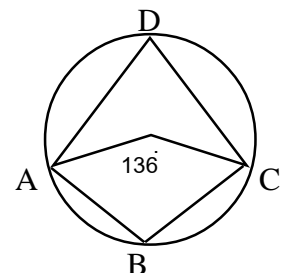
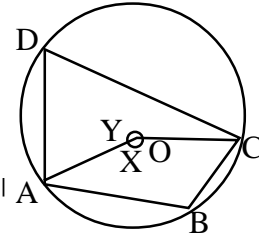
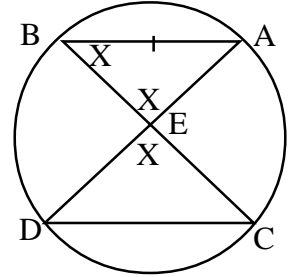
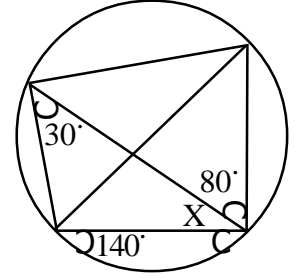
$\angle ABC = ?$

- (1) $\angle ADC = 136^\circ / 2 = 68^\circ$

{केन्द्र पर बने कोण का आधा होता है प्रमेयानुसार}

- (2) $\angle ABC = 180^\circ - 68^\circ = 112^\circ$

{चक्रीय चतु. के सम्मुख कोणों का योग 180° होता है ।}



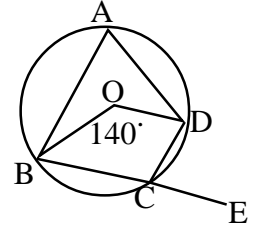
Example :-

चित्र में केन्द्र O है व BCD द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण 140° है । $\angle BAD$ व $\angle DCE$ ज्ञात करो ।

(1) $\angle BAD = 740/2 = 70^\circ$

{केन्द्र पर बने कोण का आधा है}

(2) $\angle DCE = 70^\circ$ {बहिष्कोण, अन्तराभिमुख कोण के बराबर है}



Example :-

सिद्ध करो कि एक चक्रीय समान्तर चतुर्भुज एक आयत होता है ।

दिया है :- ABCD एक चक्रीय समा. चतुर्भुज है

सिद्ध करना है :- ABCD एक आयत है ।

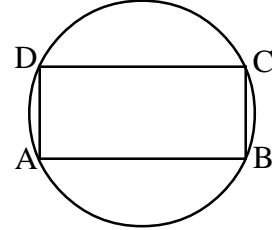
उपपत्ति :-

(1) $\angle B + \angle D = 180^\circ$ (चक्रीय चतु. होने से)

(2) $\angle B = \angle D$ (समान्तर चतु. है तथा चक्रीय है)

$\angle B = \angle D = 90^\circ$ {(1) व (2) से}

ABCD एक आयत है ।



HENSEN PROVED

Question :-

$\angle A, B, C, D$, ज्ञात करो ?

(1) $\angle e = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$ {चक्रीय चतु. के सम्मुख कोणों का योग 180° है}

(2) $\angle f = 180^\circ - 91^\circ = 89^\circ$ { " " }

(3) $\angle a = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$ {सरल रेखा पर बने कोण है}

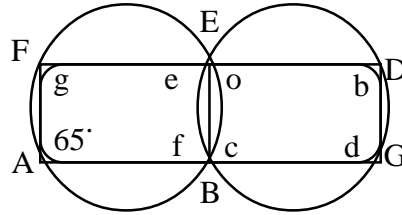
(3) $\angle c = 180^\circ - 89^\circ = 91^\circ$ {सरल रेखा पर बने कोण}

(4) $\angle b = 180^\circ - 91^\circ = 89^\circ$

(5) $\angle d = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$

$\angle a = 65^\circ$ $\angle b = 89^\circ$

$\angle c = 91^\circ$ $\angle d = 115^\circ$



Question :-

$\angle ABC = 75^\circ$
 $\angle BAC = 35^\circ$ } Ans.

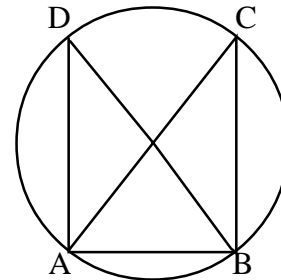
$\angle ADB$ ज्ञात करो ।

$\angle ACB = 180^\circ - (75^\circ + 35^\circ)$

$= 180^\circ - 110^\circ$

$= 70^\circ$

$\angle ADB = 70^\circ$ {एक ही वृत्तखंड में बने कोण}



Question :-

X = ?

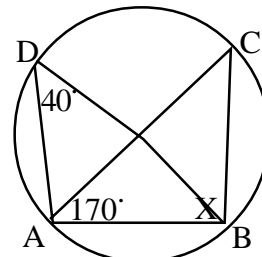
$\angle ACB = 40^\circ$ {एक ही वृत्तखंड में बने कोण}

$\angle ABC = 180^\circ - (70^\circ + 40^\circ)$

$= 180^\circ - 110^\circ$

$= 70^\circ$

X = 70° Ans



Question :- सिद्ध करो कि एक समकोण त्रिभुज के कर्ण के मध्य बिन्दु को सम्मुख शीर्ष से मिलान वाला रेखाखण्ड कर्ण का आधा होता है ।

दिया है :- $\angle B = 90^\circ$ है तथा AC का मध्य बिन्दु O है ।

रचना :- O को केन्द्र मानकर OA त्रिज्या का वृत्त खींचा ।

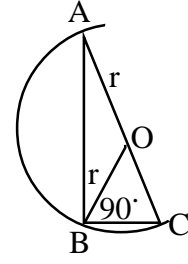
जो B बिन्दु करे छूकर गुजरता है ।

अर्थात् अर्द्धवृत्त में वृत्त कोण समकोण है O को B से मिलाया ।

$OA = OC = OB = r$ (वृत्त की त्रिज्या)

AC वृत्त का व्यास है ।

$OB = \frac{1}{2} \times AC$



Hence Proved

Chapter-5th

वृत्त की स्पर्श रेखायें

प्रमेय :- वृत्त के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा स्पर्श बिन्दु से होकर जाने वाली त्रिज्या पर लंबवत होती है ।

Q. प्रमेय :- किसी ब्राह्म बिन्दु से किसी वृत्त पर खींची गई दो स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयां बराबर होती है ।

सिद्ध करना है :- $PR = QR$

(1) $\angle OPR = \angle OQR = 90^\circ$ {त्रिज्या तथा स्पर्श रेखा परस्पर लंबवत होती है}

(2) $PO = OQ$ (वृत्त की त्रिज्या)

(3) $OR = OR$ {उभयनिष्ठ भुजा}

$\angle OQR = \angle ORP$ {समकोण के कर्ण भुजा प्रमेय}

$PR = QR$ {सर्वांगसम त्रिभुज की सम भुजायें भी समान होती है}

Hence Proved

प्रमेय :- सिद्ध करो कि एक वृत्त की दो समान्तर स्पर्श रेखाओं के स्पर्श बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखण्ड वृत्त का व्यास होता है ।

दिया है :- वृत्त का केन्द्र O है स्पर्श बिन्दु P व Q पर क्रमशः AB व

CD दो समा. स्पर्श रेखाये है ।

सिद्ध करना है :- PQ वृत्त का व्यास है व PQ केन्द्र O से गुजरता है

रचना :- वृत्त के केन्द्र O से AB व CO के समा. OR खींची ।

उपपत्ति :- $OR \perp AB$ तथा OP तिर्यक रेखा है ।

(1) $\angle OPB + \angle POR = 180^\circ$ (अंतः कोणो का योग 180° है)

(2) $\angle POR = 180^\circ - \angle OPB$ {(1 से)}

(3) $\angle OPB = 90^\circ$ {स्पर्श रेखा तथा त्रिज्या परस्पर लंब है}

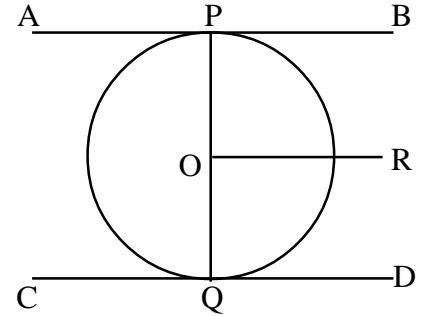
$\angle POR = 90^\circ$

इसी प्रकार $\angle QOR = 90^\circ$

$\angle POR + \angle QOR = 180^\circ$ (जोड़ने पर)

POQ एक सरल रेखा है ।

PQ व्यास है ।



Hence Proved

Example :- एक वृत्त को ब्राह्म स्पर्श करता हुआ एक चतुर्भुज ABCD है । सिद्ध करो कि $AB + CD = AD + BC$ (अथवा) यदि एक चतुर्भुज की सभी भुजाये किसी वृत्त का ब्राह्म स्पर्श करें तो सिद्ध करो कि सम्मुख भुजाओं का योग परस्पर बराबर होता है ।

दिया गया है :- वृत्त का केन्द्र O है व ABCD वृत्त

को ब्राह्म स्पर्श करता हुआ चतुर्भुज है ।

सिद्ध करना है :- $AB + CD = AD + BC$

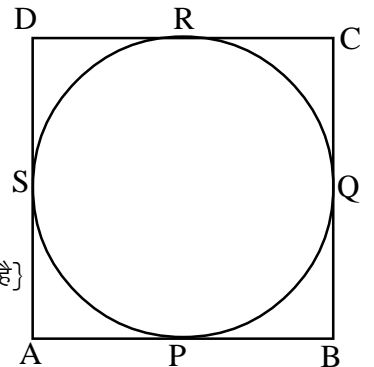
उपपत्ति :- ब्राह्म बिन्दु से किसी वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयां समान होती है ।

(1) $AP = AS$ {ब्राह्म बिन्दु A, B, C, D, से खींची गई स्पर्श रेखायें है}

(2) $DR = DS$

(3) $RC = CQ$

(4) $PB = QB$



Continue

सभी को जोड़ने पर

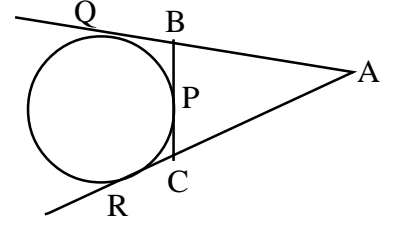
$$(2) AP+DR+RC+PB = AS+DS+CQ+QB$$

$$(3) (AP+PB) + (DR+RC) = (AS+SD+(BQ+QC))$$

$$AB+CD = AD+BC$$

चित्रानुसार

Hence Proved



Example :- एक वृत्त ABC की भुजा BC को P पर स्पर्श करता है तथा AB व AC को बढ़ाये जाने पर Q व R पर स्पर्श करता है । सिद्ध करो कि

$$AQ = \frac{1}{2} (\text{ABC का परिमाप})$$

दिया गया है :- ABC की भुजा BC को P पर तथा AB व AC को

आगे बढ़ाने पर Q व R बिन्दु पर एक वृत्त स्पर्श करता है ।

सिद्ध करना है :- $AQ = \frac{1}{2} (\text{ABC का परिमाप})$

$$(1) \text{परिमाप} = AB+AC+BC \text{ [चित्रानुसार]}$$

$$(2) AQ=AR \text{ [ब्राह्म बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखायें ल में समान होती है]}$$

$$BQ=BP$$

$$PC = CR$$

$$(3) AQ+AR = (AB+BQ)+(AC+CR) \text{ [चित्रानुसार]}$$

$$AQ+AQ = (AB+BP)+(AC+PC) \text{ [(2) के अनुसार]}$$

$$2AQ = AB+BP+PC+CA$$

$$2AQ = \text{ABC का परिमाप}$$

$$AQ = \frac{1}{2} (\text{ABC का परिमाप})$$

Hence Proved

प्रमेय :- यदि PAB एक वृत्त की छेदक रेखा है जो वृत्त को A और B पर प्रतिच्छेद करती है तथा PJ एक स्पर्श रेखा है, तो $PA.PB=PT^2$ होता है ।

Example :- चित्र में वृत्त का केन्द्र O है । यदि $PB=3\text{cm.}$, $AB=5\text{cm.}$, $PD=2\text{cm.}$ तो CD ज्ञात करो ।

$$(1) AP.BP = PC.PD \text{ [प्रमेय से]}$$

$$(2) \left. \begin{array}{l} AB=5\text{cm.} \\ PC=3\text{cm.} \\ PD=2\text{cm.} \end{array} \right\} \text{Given}$$

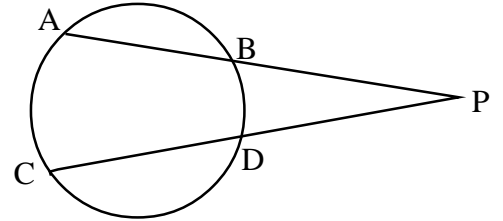
$$(3) AB+PB= AP=8\text{cm.} \text{ [(2) से]}$$

$$8 \times 3 = PC \times 2$$

$$PC = 12 \text{ cm.}$$

$$CD = PC - PD$$

$$= 12-2 = 10\text{cm. Ans.}$$



Example :- वृत्त की यदि दो जीवाये AB व CD परस्पर P पर कटती है यदि $AP = CP$ हो तो सिद्ध करो $AB=CD$

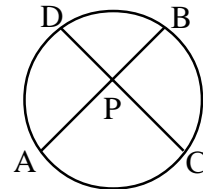
$$(1) AB.AP = CD.CP \text{ [प्रमेयानुसार]}$$

$$(2) AP = CP \text{ (Given)}$$

$$(3) AB.AP = CD.CP \text{ [(1) व (2) से]}$$

$$AB = CD$$

Hence Proved



Question :- एक वृत्त की जीवाये AB व CD परस्पर वृत्त के अंतः बिन्दु P पर कटती है ।

यदि $CD = 12\text{cm.}$, $DP = 8 \text{ cm.}$ व $AP = 5 \text{ cm.}$ हो तो AB ज्ञात करो ।

$$(1) CP=4\text{cm}$$

$$AP.PB = CP.PD$$

$$5 \times P.B = 4 \times 8$$

$$PB = 35/5$$

$$PB = 6.4$$

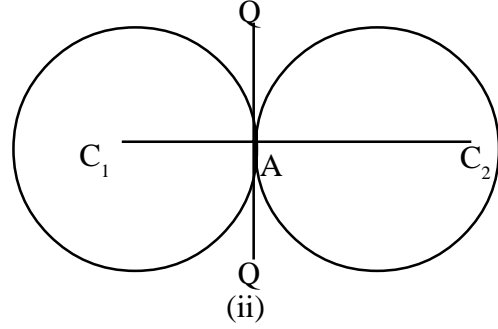
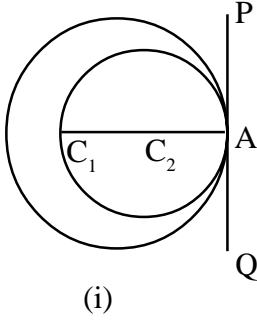
Continue

$$AB=AP+PB$$

$$= 5+6.4$$

$$= 11.4 \text{ Ans.}$$

प्रमेय :- यदि दो वृत्त एक दूसरे को अन्तः अथवा ब्राह्मय स्पर्श करते हो, तो स्पर्श बिन्दु केन्द्रो को मिलाने वाली रेखा पर स्थित होता है ।



Example :-

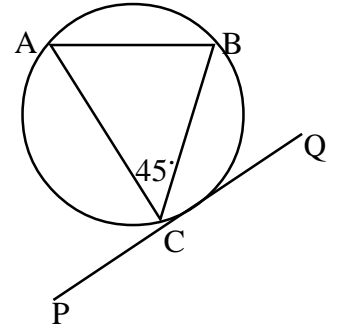
PQ वृत्त की स्पर्श रेखा है

यदि $\angle PCB = 0^\circ$ व 60° $\angle BCA = 45^\circ$

हो तो $\angle ABC$ ज्ञात करो ।

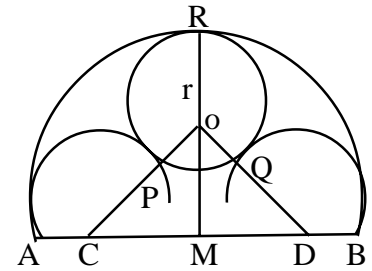
(1) $\angle PCB = \angle BAC = 60^\circ$ { दिये गये अनुसार तथा प्रमेयानुसार)

(2) $\angle ABC = 180 - (60 + 45)$
 $= 180 - 105$
 $= 75^\circ$



Example :-

चित्र में AB का मध्य बिन्दु M है । AM, MB व AB को व्यास मानकर AB के एक तरफ खींचे गये अर्धवृत्त इस प्रकार है कि O को केन्द्र मानकर r त्रिज्या का वृत्त तीनो अर्धवृत्तों को स्पर्श करता है सिद्ध करना है कि $r = \frac{1}{6} AB$
 रचना :- M, C, D, O को केन्द्र मानकर OC, OD व OM को मिलाया । OR = r है ।



माना $AB = a$

$$AM = a/2$$

(1) $AC = CM = MD = DB = a/4$ (चित्रानुसार)

$$CP = a/4 \text{ व } DO = a/4$$

(2) $OC = r + a/4$

$$OD = r + a/4 \quad \{OC = OP + PC$$

$$OD = OQ + QD\}$$

OCD एक समद्विबाहु त्रिभुज है ।

OMC में समकोण होने से

$$OM \perp CD$$

$$OC^2 = OM^2 + CM^2$$

$$OC^2 = (RM - OR)^2 + CM^2$$

$$\left(\frac{r+a}{4}\right)^2 = \left(\frac{a-r}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2$$

$$r^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{1}{2}ra = \frac{a^2}{4} + r^2 - ar + \frac{a^2}{16}$$

$$\frac{3}{2}ra = \frac{a^2}{4}$$

$$a(6r - a) = 0$$

$$6r - a = 0$$

$$a = 6r$$

$$r = \frac{1}{6}a$$

$$r = \frac{1}{6} AB$$

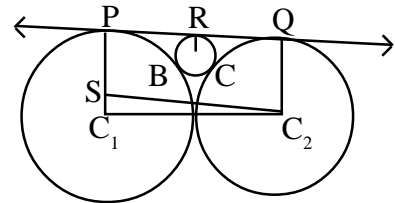
Hence Proved

Example :-

दो वृत्त ब्राह्म स्पर्श त्रि. a व b है । C उस वृत्त की त्रिज्या है जो इन दोनों को स्पर्श करता है

सिद्ध करो कि $\frac{1}{c} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$

रचना :- PC, पर लंब C₂S डाला ।



(1) $PC = A$ तथा $QC_2 = b$ [दिया गया है]

$PS = b$ तथा $C_1S = a=b$ [चित्रानुसार]

क्योंकि PQC_2S एक आयत है ।

$$PQ = C_2S = \sqrt{(C_1C_2)^2 - (C_1S)^2}$$

$$= \sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2}$$

$$= \sqrt{4ab} = 2\sqrt{ab}$$

इसी प्रकार $PR = 2\sqrt{ac}$

$RQ = 2\sqrt{bc}$

$PQ = PR + RQ$

$$2\sqrt{ab} = 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc}$$

$$\sqrt{ab} = 2(\sqrt{ac} + \sqrt{bc})$$

\sqrt{abc} का भाग प्रत्येक पद में देने पर

$$\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{abc}} = \frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{abc}} + \frac{\sqrt{bc}}{\sqrt{abc}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}}$$

Hence Proved

Question :-

चित्र में वृत्त की स्पर्श रेखा PJ है व

PA = 4 cm. AB=5cm. हो तो PT ज्ञात कीजिये ?

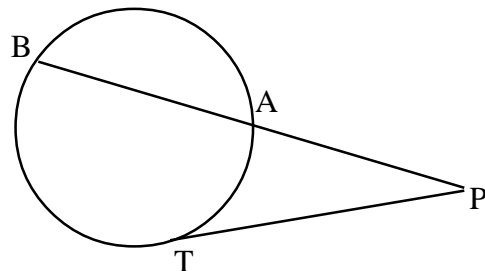
(1) $PB = PA + AB = 4 + 5 = 9$ cm.

(2) $PT^2 = PA \cdot PB$ [प्रमेय से]

$PT^2 = 4 \times 9$

$PT^2 = 36$

$PT = 6$ cm. Ans.



Question :-

चित्र में वृत्त की जीवा AB है व रेखा PQ वृत्त के बिन्दु

B पर स्पर्श रेखा है यदि $\angle AOB = 110^\circ$ तो

$\angle ABO$ होगा -

(क) 45° (ख) 70°

(ग) 55° (घ) 35°

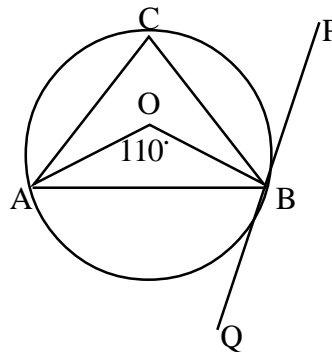
(1) $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$ [प्रमेयानुसार]

$\angle ACB = \frac{1}{2} (110)$

$= 55^\circ$

(2) $\angle ACB = \angle ABQ$ [प्रमेयानुसार]

$\angle ABQ = 55^\circ$ Ans.



Question :-

वृत्त का व्यास BC है व $\angle ABC = 38^\circ$ हो तो $\angle BAP$ होगा-

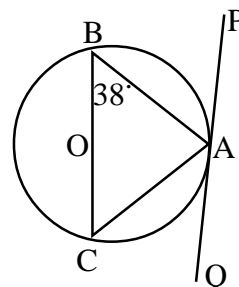
(क) 38° (ख) 52° (ग) 90° (घ) 62°

(1) $\angle CAB = 90^\circ$ [अर्द्धवृत्त में बना कोण]

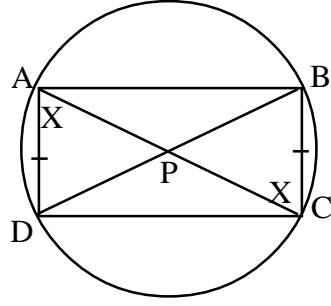
(2) $\angle BCA = 180 - (90 + 38) = 52^\circ$

(3) $\angle BCA = \angle BAP$ [प्रमेयानुसार]

$\angle BAP = 52^\circ$ Ans.



Question :- एक समलंब चक्रीय चतु. जिसमें $AB \parallel CD$ तथा $AD = BC$ है ।
विकर्ण AC तथा BD , P बिन्दु पर करते है ।
सिद्ध करना है $AP \cdot PC = BP \cdot PD$



- (1) $AD = BC$ { Given }
 - (2) $\angle APD = \angle BPC$ { शीर्षाभिमुख कोण }
 - (3) $\angle BAC = \angle ACD$ { एकान्तर कोण }
 - (4) $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$ { चक्रीय चतु. के सम्मुख कोण }
 - (5) $\angle DAC = \angle ACB$ { (3) व (4) से }
- $\therefore \triangle ADP \sim \triangle PCB$ { भुजा, कोण-कोण से }

$$\frac{AP}{AP} = \frac{PD}{PC} \quad \text{{समरूपता से}}$$

$$AD \cdot PC = BP \cdot PD$$

Hence Proved

गणित II
Model-I

पूर्णांक $100/2 = 50 - 5 = 45$

Q. 1 प्रश्न क्रमांक 1 के चार भाग (I,II,III,IV) बहुविकल्पीय है। प्रत्येक भाग में चार विकल्प (A,B,C,D) दिये गए हैं। इनके प्रत्येक का अंक $\frac{1}{2}$ है।

Q. 2 प्रश्न क्रमांक 2 से 5 क्र. तक $\frac{1}{2}$ अंक के हैं।

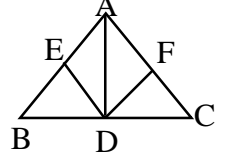
Q. 3 प्र. क्रमांक 6 से क्रमांक 11 तक 1 अंक में दो।

Q. 4 प्र. क्रमांक 12 से क्रमांक 21 तक 1 अंक में दो।

Q. 5 प्र. क्रमांक 22 से क्रमांक 26 तक 3 अंक में दो।

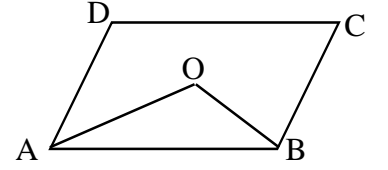
Q. I चित्र में वृत्त की जीवा $\angle A$ का समद्विभाजक AD है AB व AC पर लम्ब क्रमशः DE व DF है तो $DE:DF$ का मान होगा।

(क) 1:1 (ख) 1:2 (ग) 2:1 (घ) 3:2



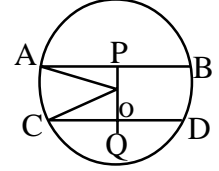
Q. II चित्र में समान्तर चतुर्भुज ABCD में आसन्न कोणो A व B के समद्विभाजक परस्पर O पर प्रतिच्छेदित होते हैं। $\angle AOB$ का मान होगा।

(क) समकोण (ख) न्यूनकोण (ग) अधिक कोण (घ) सरल कोण



Q. III दी गई आकृति में वृत्त की त्रिज्या 5 cm केन्द्र O व जीवा $AB=8cm$ व $CD=6cm$ है तो PQ की लम्बाई होगी।

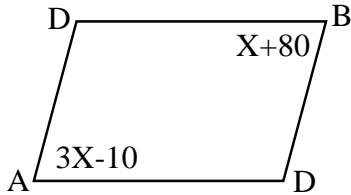
(क) 7 cm (ख) 5 cm (ग) 9 cm (घ) 4 cm



Q. IV एक घनाभ की ल.=20, चौ.=16, ऊँचाई=12CM हो तो घनाभ के विकर्ण की ल. होगी।

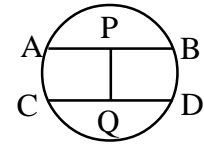
(क) 27.27 (ख) 28.28 (ग) 26.26 (घ) 25.25

Q. 6 यदि ABCD एक स. च. है तो X का मान ज्ञात करो।



Q. 7 चित्र से वृत्त की त्रिज्या ज्ञात करो।

यदि $AB \parallel CD$ तथा AB व CD के मध्य दूरी 17cm हो।

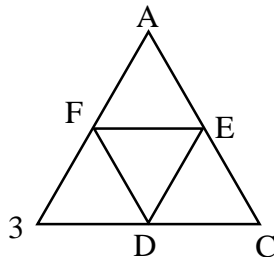


Q. 8 एक धावक वृताकार स्टेडियम के 8 चक्कर लगाकर 1760cm दूरी तय करता है। वृताकार स्टेडियम का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

Q. 9 बेलन का व्यास 14 cm व ऊँचाई 15 cm है बेलन का आयतन ज्ञात करें।

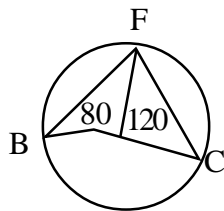
Q. 10 चित्र में D,E,F, क्रमशः BC, AC, AB का मध्य बिन्दु है।

यदि $AB=4, BC=6, AC=8$ cm हो तो DEF का परिमाप ज्ञात करो।

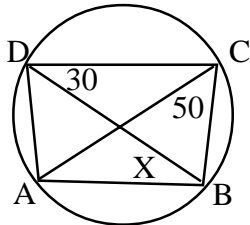


Q. 11 दो समतल भूमि पर दो खम्भे 7cm व 12cm लम्बे हैं। व इनके पादो के मध्य की दूरी 12 cm है तो इनके शीर्षों के मध्य दूरी ज्ञात करो।

Q. 12 चित्र में O वृत्त का केन्द्र है । को $\angle BAC$ का मान ज्ञात करो ।

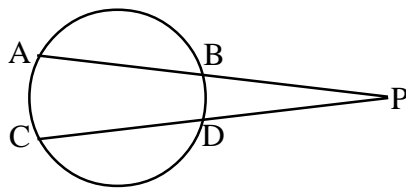


Q 13 चित्र में



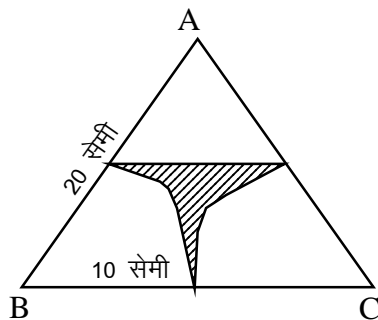
$\angle X$ का मान ज्ञात करो ।
यदि $\angle ACB = 40$, $\angle BDC = 30$

Q 14 चित्र में



$PC = 2$ cm, $AB = 6$, $PD = 2.5$ cm
 CD की लम्बाई ज्ञात करो ।

Q 15 चित्र में ABC एक समबाहु त्रिभुज है । जिसकी एक भुजा 20 सेमी है । त्रिभुज के प्रत्येक शीर्ष से 10 सेमी त्रिज्या के वृत्त खींचे गये हैं ? छायाचित्र भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करो ?



Q 16 एक शंकु की ऊँचाई 24 सेमी है तथा वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल 550 वर्ग सेमी है । इसका आयतन ज्ञात कीजिए ? निम्न को सिद्ध करो ?

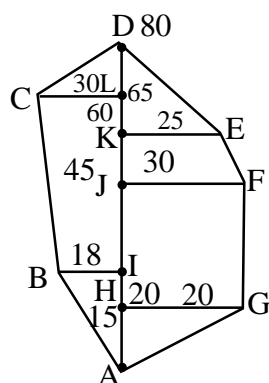
$$(1) \operatorname{COSEC}^6 Q - \operatorname{COT}^6 Q = 1 + 3 \operatorname{COSEC}^2 Q \operatorname{COT}^2 Q$$

$$(2) \frac{\operatorname{TAN} Q}{1 - \operatorname{COT} Q} + \frac{\operatorname{COT}}{1 - \operatorname{TAN} Q} = \frac{\operatorname{SIN}^3 Q - \operatorname{COS}^3 Q}{\operatorname{SIN} Q \operatorname{COS} Q (\operatorname{SIN} Q - \operatorname{COS} Q)}$$

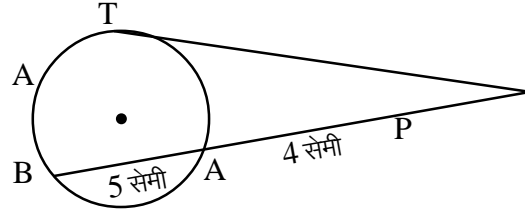
Q 18 3 सेमी का एक वृत्त खींचिएँ । इसमें एक जीवा $PQ = 5.5$ सेमी खींचिएँ । P पर वृत्त की स्पर्श रेखा खींचो ?

Q. 19 सिद्ध करो कि- "एक समचतुर्भुज की आसन्न भुजाओं के मध्य बिन्दुओं से बना चतुर्भुज एक आयत होता है ।"

Q. 20 निम्न फील्ड ग्राफ का क्षेत्रफल ज्ञात करो ?



- Q. 21 दो सकेन्द्रीय वृत्तों से परिबद्ध क्षेत्र 506 वर्गमीटर है । अन्दर के वृत्त की त्रिज्या 8 मीटर है तो बाहरी वृत्त की त्रिज्या ज्ञात करो ?
- Q. 22 समान्तर चतुर्भुज ABCD की रचना दिजिए जिसमें $AB=3-1$ सेमी और $AD=2.2$ सेमी तथा $BD=3.3$ सेमी है । इसे एक समान्तर चतुर्भुज परिवर्तित कीजिए जिसकी भुजाओं का अनुपात सामान्तर चतुर्भुज ABCD की संगत भुजाओं का $2/3$ हो ।
- Q. 23 एक $\triangle ABC$ में माधिकाँए AD, BE और CF बिन्दु G पर प्रतिच्छेद करती है । सिद्ध करो कि –
 $4(AD+BE+CF) > 3(AB+BC+CA)$
- Q. 24 सिद्ध करो कि त्रिभुज के मध्य बिन्दुओं को मिलने वाला रेखाखण्ड तीसरी भुजा के समान्तर व आधा होता है ।
या
किसी बाहरी बिन्दु से किसी वृत्त पर खींची गई, दो स्पर्श रेखाओं की लम्बाईया बराबर होती है ।
- Q. 25 यदि A और B न्यून कोण है और $\sin A = \cos B$ हो तो सिद्ध करो $A+B = 90^\circ$ होता है ।
- Q. 26 100 मीटर ऊँची एक मीनार की चोटी और उसे आधार से एक चट्टान की चोटी के उन्नयन कोण क्रमशः 30° व 45° है । चट्टान की ऊँचाई ज्ञात करें ?
- Q. 27 दी गई आकृति में PT वृत्त के बिन्दु T पर स्पर्श रेखा है तथा PAB वृत्त की एक छेदक रेखा है । यदि $PA=4$ सेमी तथा $AB=5$ सेमी है । तो PT की लम्बाई ज्ञात करो ?



- Q. 28 यदि किसी शंकू की ऊँचाई, वक्रपृष्ठ और आयतन क्रमशः H, C और V हो तो सिद्ध करो :-
 $3\sqrt{Vh^3} - C2h^2 + 9V^2 = 0$
- Q. 29 100 मीटर ऊँचे एक प्रकाश स्तम्भ के शिखर से किसी नाव का अवनमन कोण 45° है । नाव की प्रकाश स्तम्भ से दूरी लिखिए ।

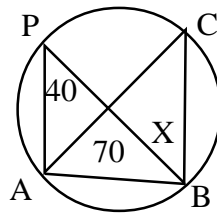
Maths-2 Model-II

M.M. 45

- Q. 1 यदि AB और CD दो असमान्तर रेखाँ हो तो इनमें समान दुरी पर रहने वाले बिन्दु P का बिन्दु पथ होगा –
(A) बिन्दु P से होकर जाने वाली AB के समान्तर ।
(B) बिन्दु P से होकर जाने वाली AB तथा CD से अन्तरित कोण रेखा ।
(C) बिन्दु P से होकर जाने वाली AB तथा CD के समान्तर रेखा ।
(D) बिन्दु P से होकर जाने वाली AB तथा CD के लम्बवत रेखा ।

- Q. 2 चित्र में X का नाम होगा –

- (क) 40°
(ख) 70°
(ग) 110°
(घ) 90°



- Q. 3 $2 \sin^2 60^\circ \cos 60^\circ$ का मान है ।

- (क) $4/3$
(ख) $3/4$
(ग) $5/2$
(घ) $1/3$

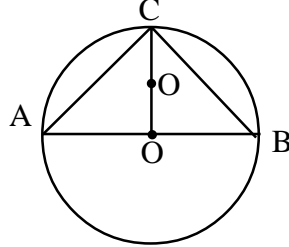
- Q. 4 एक वृत्ताकार मार्ग का ब्राह्म और अन्तः व्यास क्रमशः 10 मीटर व 6 मीटर है । वृत्ताकार मार्ग का क्षेत्रफल है :-
 (क) 25π वर्ग मीटर
 (ख) 16π वर्ग मीटर
 (ग) 9π वर्गमीटर
 (घ) 7π वर्गमीटर

Q. 5 उस वृत्त के केन्द्र का बिन्दु पथ ज्ञात कीजिए, जो दिए हुए दो बिन्दुओं से होकर जाता है ?

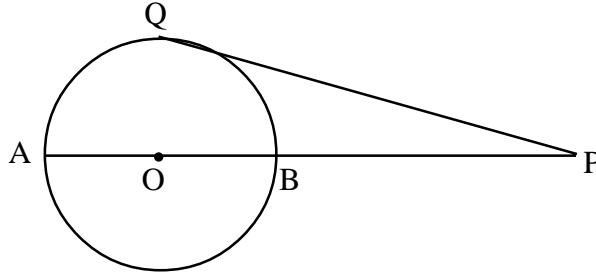
Q. 6 घड़ी के पेन्डुलम के सिरे का बिन्दुपथ लिखो ।

Q. 7 चतुर्भुज ABCD में आसन्न कोणों A और B के समद्विभाजक बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करते हैं सिद्ध करो कि $\angle APB = 90^\circ$

Q. 8 चित्र में वृत्त का केन्द्र O और OC कोण ACB का समद्विभाजक है । यदि AC=4 सेमी हो, तो BC ज्ञात करें ?



Q.9 चित्र. 5.51 में वृत्त का केन्द्र O है और Q पर PQ स्पर्श रेखा है । यदि PB=3 सेमी और PQ=6 सेमी हो तो वृत्त की त्रिज्या क्या होगी ।



Q. 10 दो गोलों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात 4:9 है । उनके आयतनों का अनुपात ज्ञात कीजिए ?

Q. 11 यदि बिन्दु (X,3) और (5,7) के बीच की दूरी 5 हो, तो X का मान ज्ञात करो ?

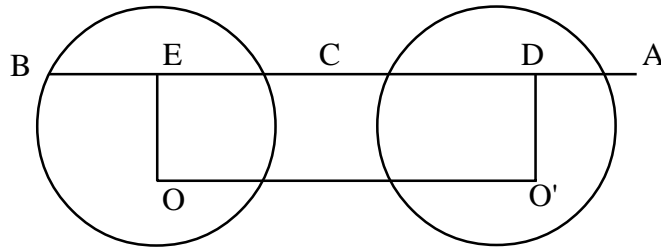
Q.12 14 सेमी की त्रिज्या वाले वृत्त की एक जीवा वृत्त के केन्द्र पर 30° का कोण बनाती है । इससे बनने वाले लघु वृत्तखण्ड और दीर्घ वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल ज्ञात करो ?

Q. 13 यदि किसी वृक्ष की छाया उसकी ऊँचाई की $\frac{1}{3}$ गुना हो तो सूर्य का उन्नयन कोण क्या होगा ?

Q.14 ABC के समरूप त्रिभुज की रचना करें जिसकी प्रत्येक भुजा दिए गए त्रिभुज की संगत भुजा का $\frac{3}{5}$ वाँ भाग हो ?

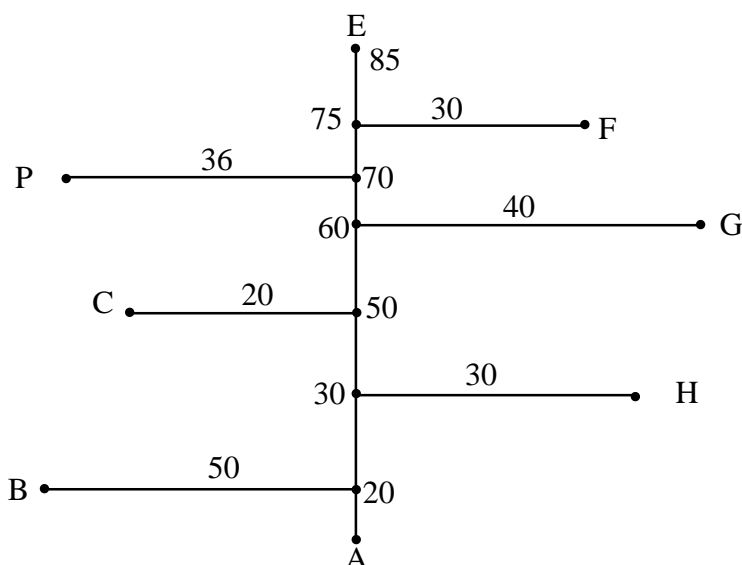
Q. 15 एक वृत्त ABC की भुजा BC को P पर स्पर्श करता है तथा AB और AC को बढ़ाए जाने पर Q और R पर स्पर्श करता है । सिद्ध करो $AQ = \frac{1}{2} (\Delta ABC \text{ का परिमाप})$

Q. 16 चित्र में O व O' दिए गए वृत्तों के केन्द्र हैं । $AB \parallel OO'$, $OO' \perp AB$ और $O'E \perp AB$ है सिद्ध करो कि $AB = 2(OO')$



Q. 17 एक समबाहु त्रिभुज की भुजाओं BC, CA और AB के मध्य बिन्दु क्रमशः D, E व F हैं । सिद्ध करो कि DEF एक समबाहु त्रिभुज है ।

Q. 18 निम्न फील्डबुक के आकड़ों से कच्चा चित्र बनाकर क्षेत्रफल ज्ञात करो ?



Q. 19 20 मीटर लम्बी, 5 मीटर ऊँची और 5 सेमी मोटी दीवार बनाने में 25 सेमी×16 सेमी×10 सेमी माप की कतनी ईंटे लगेंगी, जबकि दीवार में एक दरवाजा 2 मी.×1.5 मी. और दो खिड़की 1.5 मी.× 1 मीटर है ? 280 रु. प्रतिहजार की दर से ईंटों का मूल्य भी ज्ञात करो ?

Q. 20 निम्न को सिद्ध करो ?

$$(1) \quad 2\sec^2 q - \sec^4 q - 2\operatorname{cosec}^2 q + \operatorname{cosec}^4 q = \cot^4 q - \tan^4 q \quad (2)$$

$$(2) \quad \frac{\sin^3 Q + \cos^2 Q}{(\sin Q + \cos Q)} = 1 - \cos Q \sin Q$$

Q. 21 निम्न सर्वसमिका को सिद्ध करो ?

$$\operatorname{COSEC}^6 Q - \operatorname{COT}^6 Q = 1 + 3\operatorname{COSEC}^2 Q \operatorname{COT}^2$$

Q. 22 चिन्तामणी की मोटर साइकिल के पहिए की त्रिज्या $7\frac{1}{11}$ मीटर है । बताइए 3 किमी दूरी तय करने में कितने चक्कर लगायेगा ।

Q. 23 सिद्ध करो कि :-

चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के किसी भी युग्म का योग 180° होता है ।

अथवा

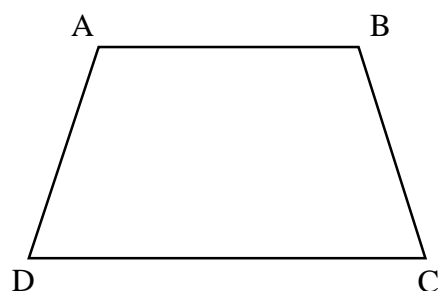
यदि एक त्रिभुज की सभी माध्यिकाएँ समान हो तो वह समबाहु त्रिभुज होगा ?

Q. 24 कोई लड़की, समतल पर किसी मीनार की ओर जाते हुए एक स्थान से देखता है कि मीनार का उन्नयन कोण 30° है । मीनार की ओर 5 मीटर और चलने पर उन्नयन कोण 45° प्राप्त होता है । मीनार की ऊँचाई ज्ञात करो ?

Q. 25 त्रिभुज ABC एक समकोण त्रिभुज है । जो कि बिन्दु C पर समकोणिक है । AB को व्यास मानकर एक अर्धवृत्त खींचा गया है । AC को P तक बढ़ाया जाता है । BP अर्धवृत्त को D पर मिलती है । सिद्ध करो कि -

$$AB^2 = AC \cdot AP + BD \cdot BP$$

Q. 26 चित्र में एक चतुर्भुज है । जिसमें AB || CD और AD || BC तो सिद्ध करो कि $\angle A = \angle B$ ।



Q 27. बिन्दु A(3, B) के माध्य दूरी 5 है तो X का मान ज्ञात करो ।

Q 28. बि = 3 A(2,3) , B(4,5) को C(1,1) किस अनुपात में विभाजित करेगा

- Q. 1. $17 + 7/7^2$ वर्ग है ।
 (1) 24 का
 (2) 19 का
 (3) 15 का
 (4) 17 का
- Q. 2. $X^3 + 8$ का एक गुणखण्ड है -
 (क) $X - 2$
 (ख) $X + 2$
 (ग) $X^2 - 2X + 4$
- Q. 3. $X^2 - 1$ तथा $X^2 + 28C + 1$ का ल. स. होगा -
 1. $(X - 2)(X + 2)^2$
 2. $(X^R - 1)(dc + 1)^2$
 3. $(X + 1)(X - 1)^2$
 4. $(X + 1)$
- Q. 4. समीकरण $(X - 3)^2 = 3$ के मुल है।
 (क) 3 ± 3
 (ख) 0
 (ग) $-3 \pm \sqrt{3}$
 (घ) 6
- Q. 5. 9744 का वर्ग मुल वैदिक विधि से मत करो
- Q. 6. $(a - b)^3 + (a + 2b)^3 - (2a +)^3 +$ के गुणखण्ड लिखो ।
- Q. 7. दो व्यंजको का म. स. है और ल.स. क्रमश $2X^2 + y^2$ और $28X^5 y^3$ है यदि उनमें से एक व्यंजक $4X^5 y^2$ हो तो दुसरा व्यंजक ज्ञात करो ?
- Q. 8. वह द्विघात समीकरण लिखो जिसके मुल -2 और 3 है
- Q. 9. 2456 का द्वन्द्व योग विधि द्वारा ज्ञात करो ?
- Q. 10. एक घड़ी 1025 रुपये नगद या 200 रुपये तत्काल अदायगी तथा 100 रुपये की 9 मासिक किश्तों में उपलब्ध है इसमें अन्तिम मास का मुलधन ज्ञात करो ।
- Q. 11. सिद्ध करो कि 5 बहुपद $2X^3 - 7X^2 - 16X + 5$ का शून्य है
- Q. 12. चार विधार्थियों के प्राप्तांक 25, 35, 45, 55 है इसका मुल बिन्दु 40 से लिया गया है । माध्य विचलन ज्ञात करो ?
- Q. 13. $3X^2 - 4 = 0$ का हल करो ?
- Q. 14. एक शहर की वर्ष 2002 में आये वर्ग 0-20 में जनसंख्या 1,00,000 थी । यदि इस वर्ष में मृत्युओं की संख्या 250 थी तो शहर की विशिष्ट मृत्युदर ज्ञात करो ?
- Q. 15. $592837 \div 199$ सूत्र है वणांक से हल करो ?
- Q. 16. व्यंजक $8a^3 - (2a - b)^3$ के गुणखण्ड करो ?
- Q. 17. व्यंजक $X^2 - 1, (X^2 + 1)(X - 1), X^2 + X + 1$ का ल. स. ज्ञात करो ?
- Q. 18. दो संख्याओं का अनुपात 5:6 है यदि प्रत्येक संख्या में से 5 घटा दिये जाते है तो उनका अनुपात 4:5 हो जाता है । संख्याएँ ज्ञात करो ?
- Q. 19. 1800 रुपये का $1\frac{1}{2}$ वर्ष का 10% से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करो ? (ब्याज चुकाने की शर्त अर्द्धवार्षिक है)
- Q. 20. निम्न समीकरणों को लिखो व लेखाचित्र बनाओ ।
 $X + y = 3, 2X + 5y = 12$
- Q. 21. निम्न बारम्बारता बंटन से समान्तर माध्य ज्ञात करो ?

वर्ग अन्तराल	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बारम्बारता	3	8	10	4	5

Q. 22 निम्नलिखित आंकड़ों से वर्ष 2005 के निवहि खर्च सुचकांक ज्ञात करो ?

वस्तु	मात्रा	2004 मूल्य रूपयो में	2005 मूल्य रूपयो में
A	4	10	12
B	6	15	20
C	5	2	5
D	4	4	4

- Q. 23 एक आयताकार मैदान का परिमाण 46 मी. तथा उसका क्षेत्रफल 120 मी. है । इसकी लम्बाई तथा चौड़ाई ज्ञात करो ?
- Q. 24 अजय तथा विक्रम ने क्रमशः 5000 रु. तथा 7000 रु. लगाकर साझे में एक व्यापार प्रारम्भ किया । विजय ने 8 माह बाद अपना धन हटा लिया । यदि वर्ष के अन्त में 3190 रु. का लाभ हुआ तो लाभ में प्रत्येक का भाग कीजिए ?
- Q. 25 एक व्यापार में A, B व C ने कुल 33000 रुपये लगाये वर्ष के अन्त में 15,000 रुपये का लाभ हुआ जिसे साझेदारों द्वारा लगाई गई पूँजी के अनुपात में बाँटा गया यदि A को 4,500 रुपये B को 5,500 रु. मिले तो द्वारा लगाई गई पूँजी ज्ञात करो ?
- Q. 26 मनमोहन ने 20,000 रुपये की मशीन खरीदी । 5,000 रुपये नगद भुगतान करने के बाद शेष राशि दो समान अर्द्धवार्षिक किस्तों में चुकाने का अनुबन्ध किया । यदि चक्रवृद्धि ब्याज की दर 20% हो और ब्याज का संयोजन अर्द्धवार्षिक किया गया जाता हो तो प्रत्येक किस्त की राशि 10 रुपये में ज्ञात करो ?
- Q. 27 निम्न बंटन की माधिका ज्ञात करो ।

वर्ग	0-8	8-16	16-24	24-32	32-40	40-48
f	42	30	50	22	8	5

Q. 28 निम्न बंटन की बहुलक ज्ञात करो ।

वर्ग अन्तराल	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बारम्बारता	4	12	18	10	6

- Q. 29 यदि कोई धन 1 वर्ष में स्वयं का $8\frac{1}{16}$ गुना हो जाता है जबकि चक्रवृद्धि ब्याज तिमाही दैय हो । ब्याज की दर ज्ञात कीजिए ?
- Q. 30 निम्न समूहित बारम्बारता बंटन का माधिका तथा मुल बिन्दु 20 से लिया गया है । माध्य विचलन ज्ञात करो ?

वर्ग	0-8	8-16	16-24	24-32	32-40
बारम्बारता	4	3	5	4	4

- Q. 1. समीकरण $(X + 1)(X + 2) = (X - 3)(X - 4)$ में X का मान है ।
- (1) 0
 - (2) -1
 - (3) 1
 - (4) अनिश्चित
- $Z(X - 1, X)$ का मान है ।
- (1) X
 - (2) 0
 - (3) $\frac{3}{2}X$
 - (4) \sqrt{X}
- Q. 3 बिन्दु $P(3-4)$ जिस चतुर्थांश में है वह है—
- (1) प्रथम
 - (2) चतुर्थ
 - (3) तृतीय
 - (4) द्वितीय
- Q. 4 समीकरण $X = \frac{1}{X}$ के हल हैं ।
- (1) -1, -1
 - (2) -1, 1
 - (3) 1, 1
 - (4) 0, 1
- Q. 5 संख्या X तथा उसके व्युत्क्रम का योग है इसे बीजगणीतीय समीकरण के रूप में लिखो ?
- Q. 6 $8X + 27$ व $8X^2 - 2X - 21$ का ल. स. पा लिखो ?
- Q. 7 वैदिक विधि द्वारा 314432 व 493039 का घन मूल ज्ञात करो ?
- Q. 8 एक दुकानदार एक पँखा 1,000 रु. नकद या 800 रु. तत्काल अदायगी तथा 2000 रु. की चार मासिक किस्तों में बेचता है । ब्याज की दर ज्ञात करो ?
- Q. 9 विलोचन विधि द्वारा निम्न समीकरणों को हल करो :-
- (1) $4X - 3y = 9$
 - (2) $9X = -3(Y + 1)$ $2X = -3y - 3$
 $5y = 7X - 5$ $5y = 7X - 5$
- Q. 10 समीकरण निकाय $\frac{1}{2X} - \frac{1}{Y} = -1$ $\frac{1}{X} + \frac{1}{29} = 8$
 $8; X \neq 0, y \neq 0$ का हल ज्ञात करो ?
- Q. 11 लेखाचित्र बनाओ ?
 $Y = X + 1$
 $Y = 2X$
- Q. 12 बंटन 3, 7, 5, 2, 9, 4 का माध्य से लिए गए विचलनो का योगफल लिखें ?
- Q. 13 A, B, व C एक चारागाह 181.51 रुपये में किराये पर लेते हैं । A उसमें 5 भेड़े $4\frac{1}{2}$ माह तक, B उसमें 8 भेड़े 5 माह तक तथा C उसमें 9 भेड़े $6\frac{1}{2}$ माह तक चराता है B के भाग का किराया जाता करो ?
- Q. 14 एक कस्बे की वर्तमान जनसंख्या 27,560 है । यदि मत दो वर्षों में जनसंख्या की वृद्धि क्रमशः 6% तथा 4% रही हो तो दो वर्ष पूर्व की जनसंख्या ज्ञात करो ?
- Q. 15 कोई घन 1 वर्ष में स्वयं का $8\frac{1}{16}$ गुना हो जाता है जबकि चक्रवृद्धि ब्याज तिमाही देय हो । ब्याज की दर ज्ञात करो ?
- Q. 16 व्यंजको 18 $(6X^4 + X^3 - X^2)$ और 45 $(2X^6 + 3X^5 + X^4)$ का ल.स. ज्ञात करो ?
- Q. 17 दो अंको वाली संख्या के अंकों का योगफल 7 है अंको का क्रम उलट देने पर प्राप्त संख्या मूल संख्या से 9 अधिक होती है । वह संख्या ज्ञात करो ?

- Q. 18 एक त्रिभुज की दो भुजाएँ X सेमी तथा $3(X+1)$ सेमी समकोण बनाती है । यदि त्रिभुज का क्षेत्रफल 84 वर्ग सेमी हो तो त्रिभुज की सभी भुजाएँ ज्ञात करो ?
- Q. 19 एक कक्षा में 9 विद्यार्थियों का भार (किग्रा में) निम्न है ।
49, 60, 47, 50, 47, 59, 58, 45, 56
- Q. 20 यदि एक साझे में हिमाँशु बाहेती, सोहन व मयंक बाहेती ने पूँजी इस प्रकार लगाई कि हिमाँशु की पूँजी का आधार सोहन की पूँजी के तिहाई के तथा मयंक की पूँजी के चौथाई के बराबर है । वर्ष के अन्त में 18,900 रुपये का लाभ हुआ तो प्रत्ये लाभ ज्ञात करो ?
- Q. 21 निम्न अशोधित मृत्युदर ज्ञात करो ?

वर्षों में आयु	जनसंख्या	मृत्युओं की संख्या
0-10	33000	-----
10-20	37000	210
20-45	-----	150
46-60	-----	-----
60 से अधिक	10,000	200
योग	1,80,000	1400

- Q. 22 निम्न का माध्य विचलन ज्ञात करो ?

X	3	4	5	6	7	8	9	10
f	2	11	12	13	9	10	14	7

- Q. 23 निम्न बारम्बराता बंटन का माध्यिका तथा मुल बिन्दु 20 से लिया गया माध्य विचलन ज्ञात करो ?

वर्ग	0-8	8-16	16-24	24-32	32-40
बारम्बराता	4	3	5	4	4

- Q. 24 निम्न को हल करो (वैदिक विधि में)

$$(1) X^3 - 6X^2 + 3X + 10$$

- Q. 25 हिमाँशु ने मोटर साईकिल खरीदने के लिए 20,000 रुपये की राशि, तीन समान वार्षिक किस्तों में लौटाने के अनुबन्ध से उधार ली । यदि चक्रवृद्धि ब्याज की दर 15% तथा ब्याज वार्षिक संयोजित किया जाता है तो हिमाँशु को प्रत्येक किस्त में कितनी राशि, निकटतम दस रुपये में चुकानी होगी ।
- Q. 26 द्विघात समीकरण को हल करो ?
 $3X^2 - 5X + 2 = 0$
- Q. 27 किसी भिन्न का अंश हर से 4 कम हो यदि अंश में से 2 घटा दिया जाए तथा हर में 1 जोड़ दिया जाए तो हर अंश का 8 गुणा हो जाता है । भिन्न ज्ञात करो ?
- Q. 28 कल्पित माध्य ज्ञात करो :-

X	800	820	860	900	920	980	1000
f	7	14	19	25	20	10	5

- Q. 29 हवजांक विधि द्वारा 6381827 में 528 का भाग दो ?

- Q. 30 निम्न बारम्बराता का बहुलक व माध्यिका ज्ञात करो ?

वर्ग	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बारम्बराता	4	12	18	10	6

कुछ विशेष-

- (1) किसी बिन्दु का भुज, बिन्दु की Y अक्ष से लम्बवत दूरी होती है।
- (2) किसी बिन्दु की कोटि, बिन्दु की X अक्ष से लम्बवत दूरी
- (3) किसी बिन्दु का भुज Y अक्ष के दांयी और धनात्मक व बांयी और ऋणात्मक होता है।
- (4) किसी बिन्दु की कोटि X अक्ष के उपर धनात्मक व नीचे ऋणात्मक होती है।
- (5) यदि $Y=0$ हो, तो बिन्दु X अक्ष पर स्थित होता है।
- (6) यदि $X=0$ हो, तो बिन्दु Y अक्ष पर स्थित होता है।
- (7) यदि $X=O$ या $Y=O$ हो तो बिन्दु मूल बिन्दु है।

दो बिन्दुओं के बीच की दूरी-

दो बिन्दु $P(X_1, Y_1)$ व $Q(X_2, Y_2)$ है।

$$\text{अतः इनका सूत्र- } PQ = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

प्रश्न:-1.

यदि एक समबाहु त्रिभुज की भुजा $2a$ हो, तो उसके शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए?

उत्तर:-

चित्र से-

OAB समबाहु त्रिभुज है? जिनकी भुजा $2a$ है।

$$OA = AB = OB = 2a$$

अब बिन्दु B से OA पर लम्ब BM डाला

$$OM = MA = a$$

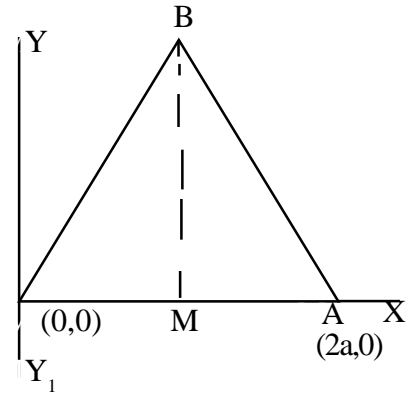
अतः समकोण त्रिभुज OMB में

$$OB^2 = OM^2 + MB^2$$

$$\text{या } (2a)^2 = (a)^2 + MB^2$$

$$\text{या } MB^2 = 3a^2$$

$$MB = \sqrt{3} a$$



प्रश्न 2. बिन्दुओं $(2,3)$ और $(5,6)$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए ?

उत्तर

$$\begin{aligned} \text{माना } PQ &= \sqrt{(5-2)^2 + (6-3)^2} \\ &= \sqrt{(3)^2 + (3)^2} \\ &= \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

Q 3. यदि बिन्दु $P(X, Y)$ बिन्दुओं $q(a+b, b-a)$ और $r(a-b, b+a)$

से बराबर से दूरी पर स्थित हो तो, सिद्ध कीजिए कि

$$bX = aY$$

$$Pq = Pr$$

$$\text{या } Pq^2 = Pr^2$$

$$\text{या } \{X - (a+b)\}^2 + \{y - (b-a)\}^2 = \{X - (a-b)\}^2 + \{y - (b+a)\}^2$$

$$\text{या } X^2 - 2(a+b)X + (a+b)^2 + y^2 - 2(b-a)y + (b-a)^2$$

$$= X^2 - 2(a-b)X + (a-b)^2 + y^2 - 2(a+b)y + (b+a)^2$$

$$\text{या } -2(a+b)X - 2(b-a)y = -2(a-b)X - 2(a+b)y$$

$$\text{या } aX + bX + by - ay = -aX - bX - ay + by$$

$$\text{या } 2bX = 2ay \Rightarrow bX = ay$$

Q 4. यदि p व q के निर्देशांक क्रमशः और $(a \cos \theta, b \sin \theta)$

व $(-a \sin \theta, b \cos \theta)$ है तो सिद्ध करो कि $op^2 + oq^2 =$

$$a^2 + b^2, \text{ जहाँ } o \text{ मूल बिन्दु है।}$$

Q 5. दो बिन्दुओं के मध्य दूरी का अन्तः विभाजन

$A(X_1, Y_1)$ व $B(X_2, Y_2)$ है और बिन्दु $P(X, Y)$ रेखागण AB को M_1, M_2 में अन्तः विभाजन करता है।

सूत्र -

$$\left(\frac{m_1 X_2 + m_2 X_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 Y_2 + m_2 Y_1}{m_1 + m_2} \right)$$

दो बिन्दुओं A व B के मध्य बाह्य विभाजन -

$$\text{सूत्र- } \left(\frac{m_1 X_2 - m_2 X_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1 Y_2 - m_2 Y_1}{m_1 - m_2} \right)$$

Q6. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (-2,1) व (5,4) को मिलाने वाली रेखा को 2:3 के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है ।

Ans. हल :- माना अभीष्ट बिन्दु (X,y) है तब सूत्र से

$$X = \frac{2 \times 5 + 3 \times (-2)}{2+3} = \frac{10-6}{5} = \frac{4}{5}$$

और $Y = \frac{2 \times 4 + 3 \times 1}{2+3} = \frac{8+3}{5} = \frac{11}{5}$

अभीष्ट बिन्दु के निर्देशांक $\frac{4}{5}, \frac{11}{5}$ है।

Q 7. X अक्ष बिन्दुओं A (3,5) और (4,7) को मिलाने वाली रेखा को किस अनुपात में विभाजित करती है ?

हल :

X अक्ष पर स्थित प्रत्येक बिन्दु की कोटि शून्य होती है । अतः माना (X,0) दिए हुए रेखा खण्ड को m_1, m_2 के अनुपात में विभाजित करता है ।

$$O = \frac{m_1 \times 7 - m_2 \times 5}{m_1 - m_2}$$

या $7m_1 - 5m_2 = 0$

या $\frac{m_1}{m_2} = \frac{5}{7}$ Ans.

Q 8. ज्ञात करो कि रेखा X + y, बिन्दु (-1,1) और (5,7)

को मिलाने वाली रेखा को किस अनुपात में विभाजित करती है ?

Ans. हल : माना दी गई रेखा बिन्दु A (-1,1) और BC (5,7) को मिलाने वाली रेखा को बिन्दु p पर 1 : 1 में विभाजित करती है।

अतः p के निर्देशांक होंगे -

$$\left(\frac{5+1}{1+1}, \frac{7+1}{1+1} \right)$$

परन्तु बिन्दु p रेखा X + y = 4 पर स्थित है।

$$\frac{5\lambda+1}{\lambda+1} + \frac{7\lambda+1}{\lambda+1} = 4$$

या $5\lambda+1+7\lambda+1 = 4\lambda+4$

या $8\lambda = 4$

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

या $\lambda = 1 : 2$ Ans.

Lesson 12,

त्रिकोण मिति से सम्बन्धित सूत्र

(1) $\sin \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$

(3) $\tan \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$

(5) $\sec \theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$

(2) $\cos \theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$

(4) $\cot \theta = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$

(6) $\operatorname{cosec} \theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}$

(7) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

(8) $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$

(9) $1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$

(10) $\sin^2 \theta \cdot \operatorname{cosec} \theta = 1$

(11) $\cos \theta \cdot \sec \theta = 1$

(12) $\tan \theta \cdot \cot \theta = 1$

(13) $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

(14) $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

(15) $\sin (90 - \theta) = \cos \theta$

(16) $\cos (90 - \theta) = \sin \theta$

(17) $\tan (90 - \theta) = \cot \theta$

(18) $\cot (90 - \theta) = \tan \theta$

(19) $\sec (90 - \theta) = \operatorname{cosec} \theta$

(20) $\operatorname{cosec} (90 - \theta) = \sec \theta$

त्रिकोण मिति फलनों की सारणी के मानों से सम्बन्धित सारणी

θ	0	30	45	60	90
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cot \theta$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\sec \theta$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	
$\operatorname{cosec} \theta$		2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

Lesson 12,

त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

1. निम्नलिखित सर्वसमिका को सिद्ध कीजिए ?

$$(1 + \tan^2 \theta) (1 + \sin \theta) (1 - \sin \theta) = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Ans. बाँया पक्ष (L.H.S.)} &= (1 + \tan^2 \theta) (1 + \sin \theta) (1 - \sin \theta) \\ &= (1 + \tan^2 \theta) (1 - \sin^2 \theta) \\ &= (\sec^2 \theta \cos^2 \theta) (1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta, 1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta) \\ &= \frac{1}{\cos^2} \cos^2 \\ &= 1 \text{ R.H.S. Ans.} \end{aligned}$$

$$2. \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} = \sec \theta - \tan \theta$$

$$\text{Ans. L.H.S.} = \sqrt{\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}}$$

अंश और हर को $\sqrt{1 - \sin \theta}$ से गुणा करने पर

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{(1 - \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)}} \times \frac{(1 - \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)} \\ &= \frac{\sqrt{(1 - \sin \theta)^2}}{\sqrt{(1 + \sin \theta)^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}} \\
&= \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} \\
&= \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\
&= \sec\theta - \tan\theta \quad \text{R.H.S.} \quad \text{Ans.}
\end{aligned}$$

3. $\cos^4\theta + \sin^4\theta = 1 - 2\cos^2\theta \sin^2\theta$

Ans. L.H.S. = $\cos^4\theta + \sin^4\theta$
 $= (\cos^2\theta)^2 + (\sin^2\theta)^2 + 2\cos^2\theta \sin^2\theta - 2\cos^2\theta \sin^2\theta$
 $= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 - 2\cos^2\theta \sin^2\theta$
 $= 1 - 2\cos^2\theta \sin^2\theta \quad \text{R.H.S.} \quad \text{Ans.}$

4. $\sqrt{\frac{\sec^2\theta - 1}{\sec^2\theta}} = \sin\theta$

Ans. L.H.S. = $\sqrt{\frac{\sec^2\theta - 1}{\sec\theta}}$
 $= \sqrt{\frac{\tan^2\theta}{\sec\theta}} \quad (1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta)$
 $= \frac{\tan\theta}{\sec\theta}$
 $= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cos\theta$
 $= \sin\theta \quad \text{R.H.S.} \quad \text{Ans.}$

5. $\sin^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\sin^2\theta \cos^2\theta$

Ans. L.H.S. = $\sin^6\theta + \cos^6\theta$
 $= (\sin^2\theta)^3 + (\cos^2\theta)^3$
 $= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)(\sin^4\theta - \sin^2\theta \cos^2\theta + \cos^4\theta)$
 $[(a^3 + b^3) = (a+b)(a^2 - ab + b^2)]$
 $= \sin^4\theta + \cos^4\theta - \sin^2\theta \cos^2\theta$
 $= (\sin^2\theta)^2 + (\cos^2\theta)^2 + 2\sin^2\theta \cos^2\theta - 2\sin^2\theta \cos^2\theta - \sin^2\theta \cos^2\theta$
 $= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 3\sin^2\theta \cos^2\theta$
 $= 1 - 3\sin^2\theta \cos^2\theta \quad \text{R.H.S.} \quad \text{Ans.}$

6. $\frac{\tan\theta}{1+\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1 + \tan\theta + \cot\theta$

Ans. L.H.S. = $\frac{\tan\theta}{1+\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}$
 $= \frac{\tan\theta}{1+\frac{1}{\tan\theta}} + \frac{\frac{1}{\tan\theta}}{1-\tan\theta}$
 $= \frac{\tan\theta}{\frac{\tan\theta+1}{\tan\theta}} + \frac{1}{\tan\theta(1-\tan\theta)}$
 $= \frac{\tan^2\theta}{\tan\theta+1} - \frac{1}{\tan\theta(\tan\theta-1)}$
 $= \frac{\tan^3\theta - 1}{\tan\theta(\tan\theta-1)}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\tan\theta-1)(\tan^2\theta+\tan\theta+1)}{\tan\theta(\tan\theta-1)} \\
&= \frac{\tan^2\theta+\tan\theta+1}{\tan\theta} = \frac{\tan^2\theta}{\tan\theta} + \frac{\tan\theta}{\tan\theta} + \frac{1}{\tan\theta} \\
&= \tan\theta+1+\cot\theta \\
&= 1+\tan\theta+\cot\theta \quad \text{R.H.S.} \quad \text{Ans.}
\end{aligned}$$

7. $\sin\theta(1+\tan\theta)+\cos\theta(1+\cot\theta) = \operatorname{cosec}\theta+\sec\theta$

Ans. L.H.S. = $\sin\theta(1+\tan\theta)+\cos\theta(1+\cot\theta)$

$$\begin{aligned}
&= \sin\theta \left(1 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \right) + \cos\theta \left(1 + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \right) \\
&= \sin\theta \frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta} + \cos\theta \frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta} \\
&= (\cos\theta+\sin\theta) \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + (\cos\theta+\sin\theta) \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \\
&= (\cos\theta+\sin\theta) \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \right) \\
&= (\cos\theta+\sin\theta) \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \\
&= \frac{\cos\theta+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta} \quad (1) \quad (\sin^2\theta+\cos^2\theta=1) \\
&= \frac{\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta} \\
&= \operatorname{cosec}\theta+\sec\theta = \text{R.H.S.} \quad \text{Ans.}
\end{aligned}$$

8. $\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta} + \frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta} = \frac{2}{1-2\cos^2\theta} = \frac{2}{2\sin^2\theta-1}$

Ans. L.H.S = $\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta} + \frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta} + \frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta} \\
&= \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{(\sin\theta-\cos\theta)(\sin\theta+\cos\theta)} + \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta}{(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)} \\
&= 2 \frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta-\cos^2\theta} = \frac{2}{\sin^2\theta-\cos^2\theta} \quad [\sin^2\theta+\cos^2\theta] \\
&= \frac{2}{1-\cos^2\theta-\cos^2\theta} = \frac{2}{1-2\cos^2\theta} \quad [\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1] \\
&= \frac{2}{1-2\cos^2\theta} \quad \text{R.H.S.} \quad \text{Ans.}
\end{aligned}$$

प्र: L.H.S = $\frac{2}{1-2\cos^2\theta}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{1-2(1-\sin^2\theta)} = \frac{2}{1-2+2\sin^2\theta} \\
&= \frac{2}{2\sin^2\theta-1} \quad \text{R.H.S} \quad \text{Ans.}
\end{aligned}$$

8. यदि $\frac{\cos A}{\cos B} = M$ तथा $\frac{\cos A}{\sin B} = n$ को सिद्ध कीजिए $(m^2+n^2) \cos^2 B = n^2$

Ans. L.H.S. $= (m^2+n^2) \cos^2 B = n^2$
 $= \frac{\cos^2 A}{\cos B} + \frac{\cos^2 \emptyset}{\sin^2 \emptyset} \cos^2 B$
 $= \frac{\cos^2 A \sin^2 B + \cos^2 A \cos^2 B}{\sin^2 B \cos^2 B} \cos^2 B$
 $= \frac{1}{\sin^2 B \cos^2 B} \cos^2 B$
 $= \frac{\cos^2 A}{\sin^2 B}$
 $= \frac{\cos A}{\sin B}^2 = n^2$ R.H.S. Ans.

10. $\frac{\tan A}{1+\tan^2 \emptyset}$ बराबर है ।

Ans. $\sin \emptyset$

11. $\frac{1}{\sin^2 \emptyset} 1 - \cot^2$ बराबर है ।

Ans. 1
निम्न के हल कीजिए ?

12. $\cos 4\emptyset - \sin 4\emptyset = \cos^2 \emptyset - \sin^2 \emptyset$

13. $\frac{\sin \emptyset}{(1+\cos \emptyset)} + \frac{(1+\cos \emptyset)}{\sin \emptyset} = 2 \operatorname{Cosec} \emptyset$

14. $\frac{\sin^3 \emptyset + \cos^3 \emptyset}{(\sin \emptyset + \cos \emptyset)} = 1 - \cos \emptyset \sin \emptyset$

15. $\sqrt{\frac{1+\cos \emptyset}{1-\cos \emptyset}} = \frac{1+\cos \emptyset}{\sin \emptyset} = \operatorname{Cosec} \emptyset + \cot \emptyset$

16. $\frac{1}{\sec \emptyset - \tan \emptyset} - \frac{1}{\cos \emptyset} = \frac{1}{\cos \emptyset} - \frac{1}{\sec \emptyset + \tan \emptyset}$

17. $(\operatorname{Cosec} \emptyset - \sin \emptyset) = (\sec \emptyset - \cos \emptyset) (\tan \emptyset + \cot \emptyset) = 1$

18. $\frac{\sec \emptyset - \tan \emptyset}{\sec \emptyset + \tan \emptyset} = 1 - 2 \sec \emptyset \tan \emptyset + 2 \tan^2 \emptyset$

19. $(1 + \cot \emptyset - \operatorname{Cosec} \emptyset) (1 + \tan \emptyset + \sec \emptyset) = 2$

20. $\sec^6 \emptyset - \tan^6 \emptyset = 1 + 3 \tan^2 \emptyset + 3 \tan^4 \emptyset$

21. $\tan^2 A - \tan^2 B = \frac{\cos^2 B - \cos^2 A}{\cos^2 A \cos^2 B} - \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A \cos^2 B}$

22. $\frac{\tan^2 \emptyset}{\tan^2 \emptyset - 1} + \frac{\operatorname{Cosec}^2 \emptyset}{\sec^2 \emptyset - \operatorname{Cosec}^2 \emptyset} + \frac{1}{\sin^2 \emptyset - \cos^2 \emptyset}$

Lesson 13,

विशेष कोणों के त्रिकोण मित्तीय अनुपात

1. $3\sin 60^\circ - 4\sin^3 60^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए ?

Ans. $3\sin 60^\circ - 4\sin^3 60^\circ$

त्रिकोणमित्तीय अनुपातों के मान रखने पर

$$\begin{aligned} &= 3 \frac{\sqrt{3}}{2} - 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 \\ &= 3 \frac{3}{2} - \frac{4 \cdot 3 \sqrt{3}}{8} \\ &= 3 \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3 \sqrt{3}}{2} \\ &= 0 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

2. $4\cot^2 45^\circ - \sec^2 60^\circ - \sin^2 30^\circ = -\frac{1}{4}$ सिद्ध कीजिए

$$\text{L.H.S.} = 4\cot^2 45^\circ - \sec^2 60^\circ - \sin^2 30^\circ$$

त्रिकोण मित्तीय अनुपातों के मान रखने पर

$$4(1)^2 - (2)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 4 - 4 - \frac{1}{4}$$

$$= -\frac{1}{4} = \text{R.H.S.} \quad \text{Ans.}$$

3. यदि $A=45^\circ$ हो तो सिद्ध कीजिए ?

$$(i) \quad \sin^2 A = 2\sin A \cos A$$

$$(ii) \quad \tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

मान ज्ञात कीजिए :-

$$4. \quad \frac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ}$$

$$5. \quad \frac{\tan 45^\circ}{\sin 30^\circ - \cos 30^\circ}$$

सिद्ध कीजिए :-

$$6. \quad \frac{\sin 60^\circ}{1+\cos 60^\circ} = \tan 30^\circ$$

$$7. \quad \tan^2 30^\circ + \tan^2 45^\circ + \tan^2 60^\circ = 4 - \frac{1}{3}$$

$$8. \quad \frac{\cos 45^\circ - \cos 60^\circ}{\sin 45^\circ + \sin 30^\circ} = \frac{\operatorname{cosec} 45^\circ - \cot 45^\circ}{\sec 45^\circ + \tan 45^\circ}$$

9. $\cos 75^\circ + \cot 75^\circ$ को 0° और 45° के मध्य त्रिकोण मित्तीय अनुपातों के पदों में व्यक्त कीजिए ?

Ans. हम देखते हैं कि $75^\circ = 90^\circ - 15^\circ$

$$\cos 75^\circ + \cot 45^\circ = \cos(90^\circ - 15^\circ) + \cot(90^\circ - 15^\circ) = \sin 15^\circ + \tan 15^\circ \quad \text{Ans.}$$

10. सिद्ध कीजिए :- $\tan 15^\circ \tan 20^\circ \tan 70^\circ \tan 75^\circ = 1$

Ans. कोण 15° और 75° पूरक कोण हैं इसी प्रकार कोण 20° और 70° भी पूरक कोण हैं ।

$$\begin{aligned} \text{L.H.S.} &= \tan 15^\circ \tan 20^\circ \tan 70^\circ \tan 75^\circ \\ &= \tan 15^\circ \tan 20^\circ \tan(90^\circ - 20^\circ) \tan(90^\circ - 15^\circ) \\ &= \tan 15^\circ \tan 20^\circ \cot 20^\circ \cot 15^\circ \\ &= \tan 15^\circ \tan 20^\circ \frac{1}{\tan 20^\circ + \tan 15^\circ} \end{aligned}$$

$$= 1 \text{ R.H.S.} \quad \text{Ans.}$$

11. निम्नलिखित समीकरण से X का मान ज्ञात कीजिए :

$$\operatorname{Cosec}(90^\circ - \theta) + X \operatorname{Cos} \theta \operatorname{Cot}(90^\circ - \theta) = \operatorname{Sin}(90^\circ - \theta)$$

Ans. $\operatorname{Cosec}(90^\circ - \theta) + X \operatorname{Cos} \theta \operatorname{Cot}(90^\circ - \theta) = \operatorname{Sin}(90^\circ - \theta)$

$$\operatorname{Sec} \theta + X \operatorname{Cos} \theta \tan \theta = \operatorname{Cos} \theta$$

$$X \operatorname{Sin} \theta = \operatorname{Cos} \theta - \operatorname{Sec} \theta$$

$$X = \frac{\operatorname{Cos} \theta - \operatorname{Sec} \theta}{\operatorname{Sin} \theta} = \frac{\operatorname{Cos} 2\theta - 1}{\operatorname{Sin} \theta \operatorname{Cos} \theta}$$

$$\frac{1 - \operatorname{Cos}^2 \theta}{\operatorname{Sin} \theta \operatorname{Cos} \theta} \quad [: 1 - \operatorname{Cos}^2 \theta = \operatorname{Sin}^2 \theta]$$

$$\frac{\operatorname{Sin} \theta}{\operatorname{Cos} \theta}$$

$$= X = -\tan \theta \quad \text{Ans.}$$

सिद्ध कीजिए :-

12. $\operatorname{Sin} 65^\circ + \operatorname{Cos} 25^\circ = 2 \operatorname{Cos} 25^\circ$

13. $\frac{\operatorname{Cos}(90^\circ + \theta) \operatorname{Cos} \theta}{\tan \theta} + \operatorname{Cos}^2(90^\circ - \theta) = 1$

14. $\frac{\operatorname{Sin} \theta \operatorname{Cos}(90^\circ - \theta) \operatorname{Cos} \theta}{\operatorname{Sec}(90^\circ - \theta)} + \frac{\operatorname{Cos} \theta \operatorname{Sin}(90^\circ - \theta) \operatorname{Sin} \theta}{\operatorname{Cosec}(90^\circ - \theta)} = \operatorname{Sin} \theta \operatorname{Cos} \theta$

15. $\frac{\operatorname{Cosec} 39^\circ}{\operatorname{Sec} 51^\circ}$ का मान है :-

Ans. 1

16. $\operatorname{Sin}^2 60^\circ \operatorname{Cot}^2 60^\circ$ का मान लिखिए ?

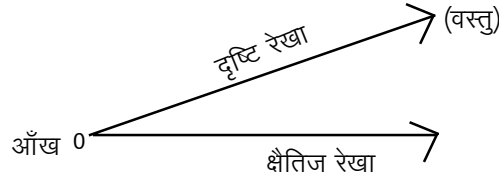
17. $\tan \frac{\pi}{6} \tan \frac{\pi}{3}$ का मान लिखिए ?

18. $4 \operatorname{Cos}^3 90^\circ - 3 \operatorname{Cos} 30^\circ$ का मान लिखिए ?

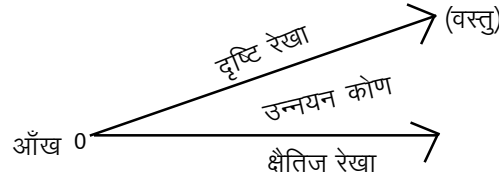
Lesson 14,

ऊँचाई और दूरी पर आधारित सरल समस्याएँ

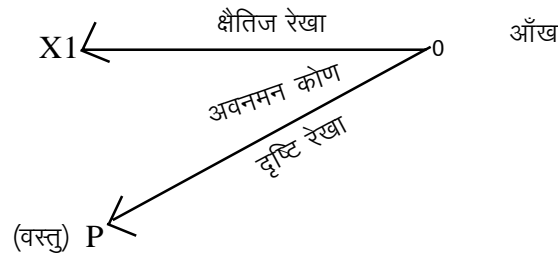
दृष्टि रेखा :- जब हम किसी वस्तु (Object) को देखते हैं तो हमारी आँख और वस्तु को जोड़ने वाली रेखा को दृष्टि रेखा कहते हैं ।



उन्नयन कोण :- जब कोई वस्तु आँख से ऊपर हो, तो दृष्टि रेखा, क्षैतिज के साथ जो कोण बनाती है उसे उन्नयन या उन्नतांश या उन्नति कोण कहते हैं



अवनमन कोण :- जब कोई वस्तु आँख के नीचे हो तो दृष्टि रेखा क्षैतिज के साथ जो कोण बनाती है उसे अवनमन या अवनति कोण कहते हैं ।



1. एक वृक्ष के शिखर पर बैठे पक्षी की वृक्ष के आधार से 20 मीटर की दूरी से देखने पर उन्नयन कोण 60 हो तो वृक्ष की ऊँचाई ज्ञात कीजिए :-

Ans. माना वृक्ष की ऊँचाई $P1=h$ मीटर है जो समतल भूमि पर समकोण बनाता है ।

O से पत्ती को देखा जा रहा है और O की Q से दूरी 20 मीटर है ।

OQ-20 मीटर और त्रिभुज OQP समकोण त्रिभुज है ।

$$\text{अतः } \tan 60^\circ = \frac{PQ}{OQ}$$

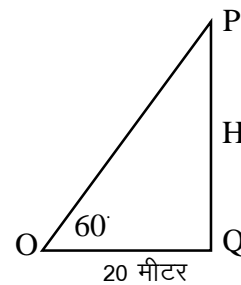
$$\text{या } \frac{h}{20} = 3$$

$$h = 20\sqrt{3}$$

$$= 20 \times 1.732 = 34.64 \text{ मीटर}$$

वृक्ष की ऊँचाई $20\sqrt{3}$ मीटर या 34.64 मीटर लगभग है ।

Ans.



2. एक मीनार के आधार से 100 मीटर दूरी पर स्थित बिन्दु का शिखर से अवनमन कोण 30° है तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए ?

Ans. माना मीनार की ऊँचाई $QP=h$ मीटर है ।

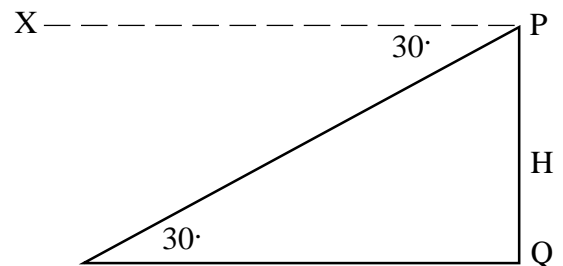
मीनार के आधार Q से स्थित बिन्दु O की

दूरी $QP = 10$ मीटर और $\angle OPX = 30^\circ$ है ।

चित्र में $\angle QOP = \angle OPX = 30^\circ$ (एकान्तर कोण)

समकोण त्रिभुज OQP में

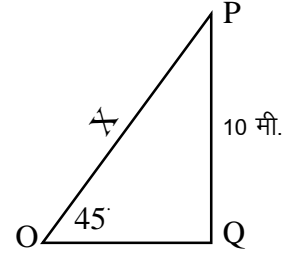
$$\frac{PQ}{OQ} = \tan 30^\circ$$



$$\begin{aligned} \text{या } \frac{r}{100} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ r &= \frac{100}{\sqrt{3}} \\ r &= \frac{100}{1.732} = 57.73 \text{ मीटर} \end{aligned}$$

मीनार की ऊँचाई 57.73 मीटर है । Ans.

3. एक बिजली का खंभा 10 मीटर ऊँचा है खंभे को सीधा लम्बवम् रखने के लिए स्टील के तार का एक सिरा खंभे की चोटी से बंधा है और दूसरा सिरा भूमि पर स्थिर किया गया है । यदि स्टील का तार खंभे के आधार बिन्दु से होकर जाने वाले क्षैतिज के साथ 45° का कोण बनाए तो स्टील के तार की लम्बाई ज्ञात कीजिए ?



$$\begin{aligned} OP &= X \text{ मीटर} \\ OQ &= 10 \text{ मीटर} \\ \text{अन्नयन कोण } \angle QOP &= 45^\circ \end{aligned}$$

$$\frac{OP}{PQ} = \text{Cosec } 45^\circ$$

$$\frac{OP}{PQ} = \text{Cosec } 45^\circ$$

$$\frac{10}{X} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$X = 10$$

$$OP = X \text{ मीटर}$$

$$\begin{aligned} OQ &= 10 \text{ मीटर} \\ \text{अन्नयन कोण } \angle QOP &= 45^\circ. \end{aligned}$$

$$\frac{OP}{PQ} = \text{Cosec } 45^\circ.$$

$$\frac{OP}{PQ} = \text{Cosec } 45^\circ.$$

$$\frac{10}{X} = 1$$

$$X = 10\sqrt{2}$$

$$10 \times 1.44 = 14.14 \text{ मीटर है } | \text{Ans.}$$

- Q 4. पृथ्वी से 1500 मीटर ऊँचाई पर उड़ते हुए वायुयान का हवाई अड्डे से अन्नयन कोण 60° है वायुयान की हवाई अड्डे से क्षैतिज दूरी ज्ञात कीजिए ।

Ans. माना वायुयान की हवाई अड्डे से क्षैतिज दूरी X मीटर है वायुयान की ऊँचाई QP = 1500 मीटर

$$\text{और अन्नयन कोण } \angle QOP = 60^\circ$$

अतः समकोण त्रिभुज OQP में

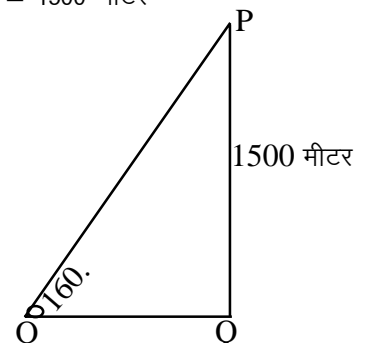
$$\tan 60^\circ = \frac{PQ}{OQ}$$

$$OQ \tan 60^\circ = PQ$$

$$\tan 60^\circ \{ \because \tan 60^\circ = \sqrt{3} \}$$

$$= \frac{1500 \times 3}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

$$OQ = 1500 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 500 \times 1.732 = 866 \text{ मीटर } \text{Ans.}$$



वायुयान की हवाई अड्डे से क्षैतिज दूरी 866 मीटर है।

Q 5. किसी स्तम्भ की चोटी का उन्नतांश समतल पर स्थित एक बिंदु से 15° है। स्तम्भ की ओर 100 मीटर चलने पर उन्नतांश 30° हो जाता है। स्तम्भ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

Ans. माना कि स्तम्भ की चोटी P का उन्नतांश कोण समतल पर स्थित बिन्दु O से 15° और बिन्दु R से 30° है जहाँ OR = 100 मीटर है। जहाँ OR = 100 मीटर है।

$$POQ = 15^\circ \text{ और } \angle PRQ = 30^\circ$$

$$\angle QPR = 15^\circ \text{ और } OR = PR = 100 \text{ मीटर}$$

समकोण त्रिभुज PQR में

$$\frac{PQ}{PR} = \sin 30^\circ$$

$$100 \times \frac{1}{2} = 50 \text{ मी.}$$

स्तम्भ की ऊँचाई 50 मी. है। Ans.

Q 6. 100 मी. ऊँचे एक प्रकाश स्तम्भ की चोटी से एक प्रेक्षक समुन्द्र में एक जहाज को ठीक अपनी ओर आते हुए देखता है। यदि जहाज का अवनमन कोण 30° से बदलकर 45° हो जाता है प्रेक्षण की इस अवधि में जहाज द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।

Ans. माना कि O और R जहाज की दो स्थितियाँ हैं और प्रेक्षण की अवधि में जहाज द्वारा तय की गई दूरी X_1 है।

माना प्रेक्षक बिन्दु P पर है और R से फ की दुरी X_2 मीटर है। बिन्दु p और के अवनमन कोण क्रमश 30° और 45° है।

$$\angle OR = X_1, RQ = X_2$$

$$\angle XPO = \angle POQ = 30^\circ$$

$$\angle XPR = \angle PRQ = 45^\circ$$

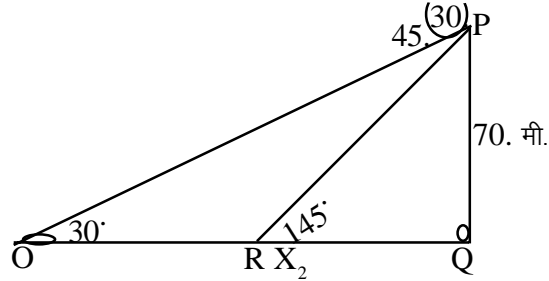
$$PQ = 100 \text{ मीटर}$$

समकोण त्रिभुज PQR में

$$\frac{PQ}{PQ} = \cot 45^\circ$$

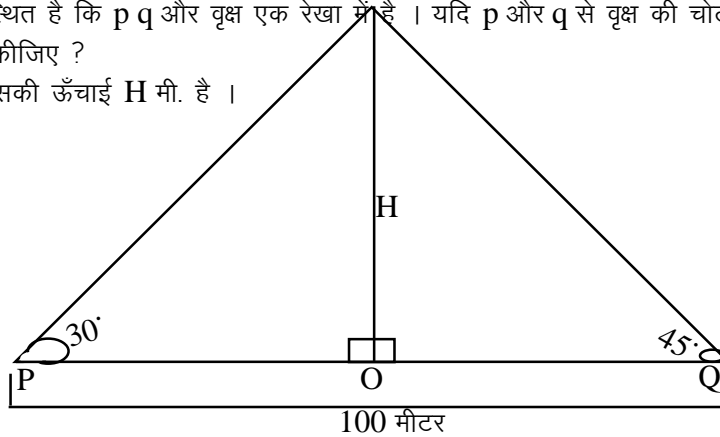
$$\frac{XR}{PQ} = 100$$

$$X_2 = 100$$



7. 100 मीटर चौड़ी एक नदी के मध्य में एक छोटा टापू है। इस टापू पर एक ऊँचा वृक्ष है। नदी के विपरीत किनारों पर दो बिन्दु p और q इस प्रकार स्थित हैं कि p q और वृक्ष एक रेखा में हैं। यदि p और q से वृक्ष की चोटी के उन्नयन कोण 30° और 45° हो तो वृक्ष की ऊँचाई ज्ञात कीजिए ?

माना OA वृक्ष है जिसकी ऊँचाई H मी. है।



$$PQ = 100 \text{ मी.}$$

$$\angle APO = 30^\circ \text{ और } \angle AQO = 45^\circ$$

अब समकोण त्रिभुज POA और QOA में

$$\tan 30^\circ = \frac{OA}{OP} \text{ और } \tan 45^\circ = \frac{OA}{OQ}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{OP} \text{ और } 1 = \frac{h}{OQ}$$

$$OP = h\sqrt{3} \text{ और } OQ = h$$

$$PQ = OP + OQ$$

$$100 = h\sqrt{3} + h$$

$$100 = (\sqrt{3} + 1)h$$

$$h = \frac{100}{\sqrt{3}+1}$$

$$h = \frac{100}{\sqrt{3}+1}$$

$$= \frac{100}{\sqrt{3}+1} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{100(\sqrt{3}-1)}{2}$$

$$= 50(\sqrt{3}-1) = 36.6 \text{ मी.}$$

वृक्ष की ऊँचाई = 36.6 मी. Ans

निम्न का हल कीजिए :-

8. किसी क्षेत्रिज समतल में स्थित एक उर्ध्वाधर बाँस ऊपरी सिरे से एक तनी हुई रस्सी बांधी गयी है । और रस्सी का दूसरा सिरा समतल पर स्थित है । सरकस का एक कलाकार समतल से रस्सी पर चढ़ रहा है। बाँस की ऊँचाई 12 मीटर है और रस्सी समतल से 30°कोण बनाती है कलाकार द्वारा बांध से ऊपरी सिरे तक पहुँचने में तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए ?
9. नदी पर बने किसी पुल के उस भाग की लम्बाई जो ठीक नदी से ऊपर है 150 मीटर है और पुल नदी के किनारे से 45° का कोण बनाता है । नदी की चौड़ाई ज्ञात कीजिए ?
10. एक क्षेत्रिज तल पर दो मीनार हैं । एक मीनार का शीर्ष दूसरी मीनार के मूल तल पर क्षेत्रिज से 60° का कोण बनाती है और दूसरी मीनार का शीर्ष पहली मीनार के मूल तल पर क्षेत्रिज से 30° का कोण बनाती है । मीनारों की ऊँचाईयों का अनुपात ज्ञात कीजिए ?
11. मीनार के आधार से 40° मीटर की दूरी पर क्षेत्रिज तल पर एक बिन्दु से मीनार की चोटी का उन्नयन कोण 30° है और मीनार की चोटी पर रखी पानी की टंकी के ऊपरी सिरे का उन्नयन कोण 45° है ज्ञात कीजिए ?
12. एक मीनार की चोटी से 7 मीटर ऊँचे एक भवन के शिखर और आधार के अवनमन कोण क्रमशः 45° और 60° है । मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए ?
13. 5 मीटर ऊँची मीनार की चोटी पर एक ध्वज दण्ड लगा हुआ है । क्षेत्रिज तल पर स्थित किसी बिन्दु से ध्वज दण्ड के ऊपरी सिरे का उन्नयन कोण 60° है और इसी बिन्दु से मीनार की चोटी का उन्नयन कोण 45° है । ध्वज दण्ड की लम्बाई ज्ञात कीजिए ?